ラゲール多項式の積の展開公式　II

高　橋　光　一

任意の指標の二つのラゲール多項式（Laguerre's polynomials）の積を和に展開する新しい公式を提示する。

1.　ラゲール多項式

ラゲール多項式は，区間$[0,\infty)$における重み付き直交性をもつ多項式の一種である。[1, 2, 3]　すなわち，

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{e^x x^{-\alpha}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha}) \\ =\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n+\alpha}{n-r}\frac{x^r}{r!}, \tag{1a}$$

$$\int_0^\infty dx e^{-x}x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)=\delta_{n,m}\Gamma(\alpha+n+1)/n!,\quad \mathrm{Re}\alpha>-1 \tag{1b}$$

ここで，n, m は 0 以上の整数である。ラゲール多項式の積を和に直す公式として，次のものが知られている[1, 2, 3]：

$$L_m^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(y)=\frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{(m!)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(xy)^n}{\Gamma(n+\alpha+1)}L_{m-n}^{(\alpha+2n)}(x+y) \tag{2a}$$

$$L_m^{(\alpha)}(x)^2=\frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{m!}\sum_{n-0}^{\infty}\frac{2^{m-n}(2n)!(2m-2n-1)!!}{\Gamma(n+\alpha+1)}L_{2n}^{(2\alpha)}(x) \tag{2b}$$

いずれも，左辺の二つのラゲール多項式において指標は同一である。前稿[5]で，われわれは (2b) を任意の指標に一般化した展開公式を見いだした。このときの展開係数がいわゆるクレブッシュ - ゴルダン係数 (CG 係数) である。CG 係数の母関数表記は，ラゲール多項式が群 SO(3) の表現の基底と対応することを利用して [6] で与えられているが，[5] ではその形を二重調和振動子モデルによって明示的に与えたのであった。本稿では，任意の指標と任意の変数を持つラゲール多項式の積を和に展開する公式を，同じモデルを用いて提示する。これは (2a) の一般化である。

2.　二重調和振動子（DHO）関数

文献[5]に従って，次のような演算子を導入する：

$$a=i\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{c}{2}\zeta^*\right),\qquad a^\dagger=i\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\zeta^*}-\frac{c}{2}\zeta\right) \tag{3a}$$

$$b=i\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\zeta^*}+\frac{c}{2}\zeta\right),\qquad b^\dagger=i\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{c}{2}\zeta^*\right) \tag{3b}$$

$$a'=i\left(\frac{1}{c'}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{c'}{2}\zeta^*\right),\quad b'=i\left(\frac{1}{c'}\frac{\partial}{\partial\zeta^*}+\frac{c'}{2}\zeta\right) \tag{3c}$$

$$a'^\dagger=i\left(\frac{1}{c'}\frac{\partial}{\partial\zeta^*}-\frac{c'}{2}\zeta\right),\quad b'^\dagger=i\left(\frac{1}{c'}\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{c'}{2}\zeta^*\right) \tag{3d}$$

プライムのあるものとないものとは線形関係にある。すなわち

$$a=ua'+vb'^\dagger,\ b=ub'+va'^\dagger \tag{4a}$$

$$a'=ua-vb^\dagger,\ b'=ub-va^\dagger \tag{4b}$$

$$u\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{c'}{c}+\frac{c}{c'}\right),\ v\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{c'}{c}-\frac{c}{c'}\right),\ u^2-v^2=1 \tag{4c}$$

ここで，c, c' は任意の実数，ζ は複素数，* は複素共役を表す。$\begin{pmatrix}a'\\ b'^\dagger\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u & -v\\ -v & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b^\dagger\end{pmatrix}$ であるから，(4) は $a^2-b^{\dagger 2}$ を不変にする2次元ローレンツ群 $O(1,1)$ を定義する。

ゼロでない交換関係は

$$[a, a^\dagger]\equiv aa^\dagger-a^\dagger a=1=[b, b^\dagger]=[a', a'^\dagger]=[b', b'^\dagger]=1 \tag{5a}$$

$$[a', a^\dagger]=[b', b^\dagger]=u,\ [a', b]=[b', a]=v \tag{5b}$$

と，これらのエルミット共役で与えられる。これらを用いて，規格化されたDHO関数[4]

$$|\zeta, \zeta^*;\ n, \alpha, c\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!(\alpha+n)!}}(a^\dagger)^{n+\alpha}(b^\dagger)^n|\zeta, \zeta^*;\ 0, c\rangle\equiv|\zeta, \zeta^*;\ \mathbf{n}, c\rangle \tag{6a}$$

$$|\zeta, \zeta^*;\ n, \alpha, c'\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!(\alpha+n)!}}(a'^\dagger)^{n+\alpha}(b'^\dagger)^n|\zeta, \zeta^*;\ 0, c'\rangle\equiv|\zeta, \zeta^*;\ \mathbf{n}, c'\rangle \tag{6b}$$

をつくる。$\mathbf{n}\equiv(n_a, n_b)\equiv(n+\alpha, n)$，また，$|\zeta, \zeta^*;\ 0, c\rangle$, $|\zeta, \zeta^*;\ 0, c'\rangle$ は消滅演算子によって0になる（すなわち $a|\zeta, \zeta^*;\ 0, c\rangle=b|\zeta, \zeta^*;\ 0, c\rangle=a'|\zeta, \zeta^*;\ 0, c'\rangle=b'|\zeta, \zeta^*;\ 0, c'\rangle=0$）基底状態である（基底状態に対応する関数を0関数と呼ぶことにする。）：

$$|\zeta, \zeta^*;\ 0, c\rangle=\frac{c}{\sqrt{4\pi}}e^{-c^2\zeta^*\zeta/2}, |\zeta, \zeta^*;\ 0, c'\rangle=\frac{c'}{\sqrt{4\pi}}e^{-c'\zeta^*\zeta/2}, \tag{7a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy\,|\zeta, \zeta^*;\ 0, c\rangle^2=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy\,|\zeta, \zeta^*;\ 0, c'\rangle^2=1 \tag{7b}$$

ただし，実数 $x.y$ を用い $\zeta=(x+iy)/2$ である。

(6a)はラゲール多項式を用いて次のように表される：

$$|\zeta,\zeta^*;\ \mathbf{n},c\rangle=\frac{c}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{n_b!}{n_a!}}(-ic\zeta)^{n_a-n_b}L_{n_b}^{(n_a-n_b)}(c^2\zeta^*\zeta)e^{-c^2\zeta^*\zeta/2} \tag{8}$$

したがって，われわれの目的は，積 $|\zeta,\zeta^*;\ \mathbf{m},c\rangle|\zeta,\zeta^*;\ \mathbf{n},c'\rangle$ を DHO 関数の一次結合として展開することと同等である。

3.　展開の漸化式

以後，DHO 関数を表すのに，特に断らない限り，変数 ζ,ζ^* をあらわに書かないことにする。また，簡単のため規格化因子のない関数を考え，$|\mathbf{n}\rangle$ の代わりに $|\mathbf{n})$ の表記を用いることにする。すなわち

$$|\mathbf{n})=(a^\dagger)^{n_a}(b^\dagger)^{n_b}|0\rangle=\sqrt{n_a!\,n_b!}\ |\mathbf{n}\rangle=\frac{c}{\sqrt{4\pi}}n!(-ic\zeta)^{\alpha}L_n^{(\alpha)}(c^2\zeta^*\zeta)e^{-c^2\zeta^*\zeta/2} \tag{9}$$

また，パラメータ c' の DHO 関数は $|\mathbf{n})',|\mathbf{n}\rangle'$ などとプライムを付けて表すことにする。

DHO 関数の積は

$$\begin{aligned}|\mathbf{m};\ \mathbf{n})&\equiv(a^\dagger)^{m_a}(b^\dagger)^{m_b}|0\rangle(a'^\dagger)^{n_a}(b'^\dagger)^{n_b}|0\rangle'\\&=a^\dagger|\mathbf{m}-1_a;\ \mathbf{n})-\frac{1}{2}|\mathbf{m}-1_a)(a^\dagger+b)|\mathbf{n})'\\&=a^\dagger|\mathbf{m}-1_a;\ \mathbf{n})-\frac{u+v}{2}|\mathbf{m}-1_a)(|\mathbf{n}+1_a)'+n_b|\mathbf{n}-1_b)')\\&=a^\dagger|\mathbf{m}-1_a;\ \mathbf{n})-\frac{u+v}{2}(|\mathbf{m}-1_a;\ \mathbf{n}+1_a)+n_b|\mathbf{m}-1_a;\ \mathbf{n}-1_b))\end{aligned} \tag{10}$$

である。ここで j を整数として $\mathbf{m}-j_a\equiv(m_a-j,m_b),\mathbf{m}-j_b\equiv(m_a,m_b-j)$ である。同様に

$$|\mathbf{m};\ \mathbf{n})=a'^\dagger|\mathbf{m};\ \mathbf{n}-1_a)-\frac{u-v}{2}(|\mathbf{m}+1_a;\ \mathbf{n}-1_a)+m_b|\mathbf{m}-1_b;\ \mathbf{n}-1_a)) \tag{11}$$

(11) で $\mathbf{m}\to\mathbf{m}-1_a,\mathbf{n}\to\mathbf{n}+1_a$ とすると

$$|\mathbf{m}-1_a;\mathbf{n}+1_a)=a'^\dagger|\mathbf{m}-1_a;\mathbf{n})-\frac{u-v}{2}(|\mathbf{m};\mathbf{n})+m_b|\mathbf{m}-1_a-1_b;\mathbf{n})) \tag{12}$$

これを（10）に代入して

$$|\mathbf{m};\mathbf{n})=\frac{4}{3}\left(a^\dagger-\frac{u+v}{2}a'^\dagger\right)|\mathbf{m}-1_a;\mathbf{n})+\frac{m_b}{3}|\mathbf{m}-1_a-1_b;\mathbf{n})-\frac{2}{3}(u+v)n_b|\mathbf{m}-1_a;\mathbf{n}-1_b) \tag{13a}$$

m_b,n_a,n_b を減らす式も同様に書き下すことができる：

$$|\mathbf{m};\mathbf{n})=\frac{4}{3}\left(b^\dagger-\frac{c'}{2c}b'^\dagger\right)|\mathbf{m}-1_b;\mathbf{n})+\frac{m_a}{3}|\mathbf{m}-1_a-1_b;\mathbf{n})-\frac{2c'}{3c}n_a|\mathbf{m}-1_b;\mathbf{n}-1_a) \tag{13b}$$

$$|\mathbf{m};\mathbf{n})=\frac{4}{3}\left(a'^\dagger-\frac{c}{2c'}a^\dagger\right)|\mathbf{m};\mathbf{n}-1_a)+\frac{n_b}{3}|\mathbf{m};\mathbf{n}-1_a-1_b)-\frac{2c}{3c'}m_b|\mathbf{m}-1_b;\mathbf{n}-1_a) \tag{13c}$$

$$|\mathbf{m};\mathbf{n})=\frac{4}{3}\left(b'^\dagger-\frac{c}{2c'}b^\dagger\right)|\mathbf{m};\mathbf{n}-1_b)+\frac{n_a}{3}|\mathbf{m};\mathbf{n}-1_a-1_b)-\frac{2c}{3c'}m_a|\mathbf{m}-1_a;\mathbf{n}-1_b) \tag{13d}$$

(13) の具体例を挙げると ($u+v=c'/c,\ u-v=c/c'$ に注意して)

$$|1,0;0,0)=\frac{4}{3}\left(a^\dagger-\frac{c'}{2c}a'^\dagger\right)|0;0) \tag{14a}$$

$$|0,1;0,0)=\frac{4}{3}\left(b^\dagger-\frac{c'}{2c}b'^\dagger\right)|0;0) \tag{14b}$$

$$|1,1;0,0)=\left[\left(\frac{4}{3}\right)^2\left(a^\dagger-\frac{c'}{2c}a'^\dagger\right)\left(b^\dagger-\frac{c'}{2c}b'^\dagger\right)+\frac{1}{3}\right]|0;0) \tag{14c}$$

$$|1,0;1,0)=\left(\frac{4}{3}\right)^2\left(a^\dagger-\frac{c'}{2c}a'^\dagger\right)\left(a'^\dagger-\frac{c}{2c'}a^\dagger\right)|0;0) \tag{14d}$$

$$|1,0;0,1)=\left[\left(\frac{4}{3}\right)^2\left(a^\dagger-\frac{c'}{2c}a'^\dagger\right)\left(b'^\dagger-\frac{c}{2c'}b^\dagger\right)-\frac{2c'}{3c}\right]|0;0) \tag{14e}$$

$$|0,1;1,0)=\left[\left(\frac{4}{3}\right)^2\left(b^\dagger-\frac{c'}{2c}b'^\dagger\right)\left(a'^\dagger-\frac{c}{2c'}a^\dagger\right)-\frac{2c}{3c'}\right]|0;0) \tag{14f}$$

ただし

$$|0;0)\equiv|0)|0)'=\frac{cc'}{4\pi}e^{-(c^2+c'^2)\zeta^*\zeta/2}=\frac{cc'}{\sqrt{4\pi}c''}\left(\frac{c''}{\sqrt{4\pi}}e^{-c''^2\zeta^*\zeta/2}\right)\equiv\frac{cc'}{\sqrt{4\pi}c''}|0)'' \tag{15a}$$

$$c''=\sqrt{c^2+c'^2} \tag{15b}$$

(15a) で与えられる新しい 0 関数 $|0;0)$ は，次の演算子を作用させると 0 になる：

$$a''=i\left(\frac{1}{c''}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{c''}{2}\zeta^*\right),\quad b''=i\left(\frac{1}{c''}\frac{\partial}{\partial\zeta^*}+\frac{c''}{2}\zeta\right) \tag{16}$$

演算子 a, b, a', b' との関係は (4) と同様である：

$$a=u'a''+v'b''^\dagger,\quad b=u'b''+v'a''^\dagger \tag{17a}$$

$$a'=u''a''+v''b''^\dagger,\quad b'=u''b''+v''a''^\dagger \tag{17b}$$

$$u'\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{c''}{c}+\frac{c}{c''}\right),\ v'\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{c''}{c}-\frac{c}{c''}\right),\ u''\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{c''}{c'}+\frac{c'}{c''}\right),\ v''\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{c''}{c'}-\frac{c'}{c''}\right) \tag{17c}$$

(13), (14), (15) から直ちにわかることであるが，$|\mathbf{m},\mathbf{n})$ は $a''^\dagger$ と b'' の一次結合，および $b''^\dagger$ と a'' の一次結合の適当なベキを $|0;0)$ に作用させたものの線形結合である。このとき

例えば，$\alpha a''^{\dagger}+\beta b''$ が $(\gamma b''^{\dagger}+\delta a'')|0;0)$ に左から作用しているときは，$\alpha\gamma a''^{\dagger}b''^{\dagger}$ と $\beta\gamma$ が残る。このことを考慮すると，DHO 関数は次のように表されることがわかる：

$$|\mathbf{m},\mathbf{n})=\sum_{r=0}^{r_{\max}} C_r^{\mathbf{m},\mathbf{n}} a''^{\dagger\, m_a+n_a-r} b''^{\dagger\, m_b+n_b-r}|0;0) \tag{18a}$$

$$r_{\max}=\min(m_a+n_a,\, m_b+n_b) \tag{18b}$$

当然のことながら，$C_0^{0,0,0,0}=1$ である。(18a) の右辺で，$a''^{\dagger}$, $b''^{\dagger}$ のベキが最も高次の項が $a''^{\dagger\, m_a+n_a}b''^{\dagger\, m_b+n_b}$ になるのは $|\mathbf{m},\mathbf{n})$ の定義から明らかである。

$$a^{\dagger}-\frac{c'}{2c}a'^{\dagger}=\alpha a''^{\dagger}+\beta b'' \tag{19a}$$

$$b^{\dagger}-\frac{c'}{2c}b'^{\dagger}=\alpha b''^{\dagger}+\beta a'' \tag{19b}$$

$$\alpha=u'-\frac{c'}{2c}u''=\frac{3c}{4c''},\quad \beta=v'-\frac{c'}{2c}v''=\frac{2c'^2-c^2}{4cc''} \tag{19c}$$

を使い, (18a) を (13a, b) に代入して, 展開係数の指標 m_a, m_b に関する次の漸化式を得る：

$$C_r^{\mathbf{m},\mathbf{n}}=\frac{c}{c''}C_r^{\mathbf{m}-1_a,\mathbf{n}}+\frac{4\beta}{3}(m_b+n_b-r+1)C_{r-1}^{\mathbf{m}-1_a,\mathbf{n}}+\frac{m_b}{3}C_{r-1}^{\mathbf{m}-1_a-1_b,\mathbf{n}}-\frac{2c'n_b}{3c}C_{r-1}^{\mathbf{m}-1_a,\mathbf{n}-1_b} \tag{20a}$$

$$=\frac{c}{c''}C_r^{\mathbf{m}-1_b,\mathbf{n}}+\frac{4\beta}{3}(m_a+n_a-r+1)C_{r-1}^{\mathbf{m}-1_b,\mathbf{n}}+\frac{m_a}{3}C_{r-1}^{\mathbf{m}-1_a-1_b,\mathbf{n}}-\frac{2c'n_a}{3c}C_{r-1}^{\mathbf{m}-1_b,\mathbf{n}-1_a} \tag{20b}$$

同様に

$$a'^{\dagger}-\frac{c}{2c'}a^{\dagger}=\alpha' a''^{\dagger}+\beta' b'' \tag{21a}$$

$$b'^{\dagger}-\frac{c}{2c'}b^{\dagger}=\alpha' b''^{\dagger}+\beta' a'' \tag{21b}$$

$$\alpha'=u''-\frac{c}{2c'}u'=\frac{3c'}{4c''},\quad \beta'=v''-\frac{c}{2c'}v'=\frac{2c^2-c'^2}{4c'c''} \tag{21c}$$

と (18a), (13c, d) から

$$C_r^{\mathbf{m},\mathbf{n}}=\frac{c'}{c''}C_r^{\mathbf{m},\mathbf{n}-1_a}+\frac{4\beta'}{3}(m_b+n_b-r+1)C_{r-1}^{\mathbf{m},\mathbf{n}-1_a}+\frac{n_b}{3}C_{r-1}^{\mathbf{m},\mathbf{n}-1_a-1_b}-\frac{2\,cm_b}{3c'}C_{r-1}^{\mathbf{m}-1_b,\,\mathbf{n}-1_a} \tag{22a}$$

$$=\frac{c'}{c''}C_r^{\mathbf{m},\mathbf{n}-1_b}+\frac{4\beta'}{3}(m_a+n_a-r+1)C_{r-1}^{\mathbf{m},\mathbf{n}-1_b}+\frac{n_a}{3}C_{r-1}^{\mathbf{m},\mathbf{n}-1_a-1_b}-\frac{2\,cm_a}{3c'}C_{r-1}^{\mathbf{m}-1_a,\,\mathbf{n}-1_b} \tag{22b}$$

を得る。(20a), (20b) および (22a), (22b) に意味があるのは，右辺の C 係数の少なくとも一つが (18b) の条件を満たす場合である。また，C 係数は c'/c の関数である。

4.　積の展開

(18a) で，すべての$C_r^{\mathbf{m},\mathbf{n}}$が知られたとする。この左辺は（8）より

$$|\,\mathbf{m},\mathbf{n}) = \frac{cc'}{4\pi} m_b!\, n_b!\, (-ic\zeta)^{l} (-ic'\zeta)^{l'} L_{m_b}^{(l)}(c^2\zeta^*\zeta) L_{n_b}^{(l')}(c'^2\zeta^*\zeta) e^{-c''^2\zeta^*\zeta/2} \tag{23}$$

ここで $l = m_a - m_b,\ l' = n_a - n_b$ である。

(18a) の右辺の Σ 記号の中は（15），（9）を使って

$$C_r^{\mathbf{m},\mathbf{n}} a''^{\dagger\, m_a+n_a-r} b''^{\dagger\, m_b+n_b-r}\,|\,0\,;\,0)$$

$$= \frac{cc'}{4\pi} C_r^{\mathbf{m},\mathbf{n}} (m_b+n_b-r)!\,(ic''\zeta)^{l+l'} L_{m_b+n_b-r}^{(l+l')}(c''^2\zeta^*\zeta) e^{-c''^2\zeta^*\zeta/2} \tag{24}$$

と書き換えられる。$s \equiv c^2\zeta^*\zeta,\ t \equiv c'^2\zeta^*\zeta$ とおいて (18a)，（23），（24）より

$$L_{m_b}^{(l)}(s) L_{n_b}^{(l')}(t) = \frac{c''^{\,l+l'}}{c^{l} c'^{\,l'} m_b!\, n_b!} \sum_{r=0}^{r_{\max}} (m_b+n_b-r)!\, C_r^{\mathbf{m},\mathbf{n}} L_{m_b+n_b-r}^{(l+l')}(s+t) \tag{25a}$$

$$c'/c = \sqrt{t/s} \tag{25b}$$

これが求める展開式である。(25b) より，

$$\frac{c^{l} c'^{\,l'}}{c''^{\,l+l'}} = \left(\frac{s}{s+t}\right)^{l/2} \left(\frac{t}{s+t}\right)^{l'/2} \tag{26}$$

であるので

$$\bar{L}_m^{(l)}(s) \equiv m!\, s^{l/2} L_m^{(l)}(s) \tag{27}$$

という関数を定義すると (25a) は次のようにコンパクトに表される。

$$\bar{L}_m^{(l)}(s) \bar{L}_n^{(l')}(t) \equiv \sum_{r=0}^{r_{\max}} C_r^{\mathbf{m},\mathbf{n}} (t/s) \bar{L}_{m+n-r}^{(l+l')}(s+t) \tag{28}$$

ここで，$\mathbf{m} = (m+l,\ m),\ \mathbf{n} = (n+l',\ n)$ である。なお，まえに述べたように $C_r^{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ は c'/c の関数であるので，（28）では t/s の関数ということになる。

5.　漸化式の解

漸化式（20），（22）の解を一般的に求めるのは難しい。しかし，特別の場合には比較的簡単に解くことができる。

(i)　$C_0^{0,0,0,0} = 1$ より

$$C_0^{m_a,m_b,n_a,n_b} = \left(\frac{c}{c''}\right)^{m_a+m_b} \left(\frac{c'}{c''}\right)^{n_a+n_b} \tag{29}$$

(ii) $\mathbf{m}=(m_a, 0), \mathbf{n}=(n_a, 0)$

$$C_r^{m_a,0,n_a,0}=\delta_{r,0}\left(\frac{c}{c''}\right)^{m_a}\left(\frac{c'}{c''}\right)^{n_a} \tag{30}$$

(iii) $\mathbf{m}=(m_a, m_b),\ \mathbf{n}=(0, 0)$

$$C_r^{m_a,m_b,0,0}=\frac{m_a!\,m_b!}{r!(m_a-r)!(m_b-r)!}\left(\frac{c}{c''}\right)^{m_a+m_b-2r}\left(\frac{c'}{c''}\right)^{2r} \tag{31}$$

(iv) $\mathbf{m}=(m_a, 0),\ \mathbf{n}=(0, n_b)$

$$C_r^{m_a,0,0,m_b}=(-1)^r\frac{m_a!\,n_b!}{r!(m_a-r)!(n_b-r)!}\left(\frac{c}{c''}\right)^{m_a}\left(\frac{c'}{c''}\right)^{n_b} \tag{32}$$

6. C 係数の積分表示

(25a) において C 係数は $t/s=c'^2/c^2$ の関数である。$t=ks$ ($k=c'^2/c^2$ は定数) とおいて両辺に $e^{-(1+k)s}((1+k)s)^{l+l'}L_m^{(l+l')}((1+k)s)$ をかけ s で積分すると

$$\int_0^\infty dse^{-(1+k)s}((1+k)s)^{l+l'}L_m^{(l+l')}((1+k)s)L_{m_b}^{(l)}(s)L_{n_b}^{(l')}(t)$$
$$=\frac{1}{m_b!\,n_b!}\sum_{r=0}^{r_{\max}}(m_b+n_b-r)!\,C_r^{\mathbf{m},\mathbf{n}}(k)\frac{(1+k)^{(l+l')/2}}{k^{l'/2}}$$
$$\times\int_0^\infty dse^{-(1+k)s}((1+k)s)^{l+l'}L_m^{(l+l')}((1+k)s)L_{m_b+n_b-r}^{(l+l')}((1+k)s)$$

右辺の積分は，$\mathrm{Re}(l+l')>-1$ のとき（1b）より $\delta_{m,m_b+n_b-r}\Gamma(l+l'+m+1)/((1+k)m!)$ なので，あらためて $l+l'+m\equiv m_a+n_a-r$ で r を定義し

$$\frac{(1+k)^{-1-(l+l')/2}}{m_b!\,n_b!\,k^{l'/2}}(m_a+n_a-r)!\,C_r^{\mathbf{m},\mathbf{n}}(k)=\int_0^\infty dse^{-(1+k)s}s^{l+l'}L_{m_b+n_b-r}^{(l+l')}((1+k)s)L_{m_b}^{(l)}(s)L_{n_b}^{(l')}(ks)$$
$$m_a=m_b+l,\quad n_a=n_b+l' \tag{33}$$

という C 係数に対する積分表示を得る。

7. DHO 関数の複素共役を含む積の展開

（18）で与えられる展開式は，広がり c と c' の二つの DHO 関数の積から，広がり $c''=\sqrt{c^2+c'^2}$ の DHO 関数の和を得る方法を与えたものと見ることができる。これは，演算子の行列要素を，二つの状態 $|\mathbf{m}, c\rangle\,|\mathbf{n}, c'\rangle$ と $|\mathbf{l}, c''\rangle$ に関して求めるときに便利である。このとき，条件

$$c^2+c'^2=c''^2 \tag{34}$$

は，遷移 $|\mathbf{m}, c\rangle|\mathbf{n}, c'\rangle\to|\mathbf{l}, c''\rangle$ に伴う一種の保存則と自然に対応している。

積の一方が複素共役，すなわち $|\mathbf{m}, c\rangle^*|\mathbf{n}, c'\rangle$ のときは，上記の遷移は $|\mathbf{n}, c'\rangle\to|\mathbf{m}, c\rangle|\mathbf{l}, c''\rangle$ となり，期待される保存則 $c'^2-c^2=c''^2$ は（34）と相容れない。この場合，展開式はどのように表されるであろうか。この問題は，生成演算子について，（3）により次の関係があることに注意すれば簡単に解決できる：

$$a^{\dagger *}=-b^\dagger,\ \ b^{\dagger *}=-a^\dagger \tag{35}$$

したがって，$\mathbf{m}=(m_a, m_b)$ にたいし

$$|\mathbf{m}, c\rangle^*=(a^{\dagger m_a}b^{\dagger m_b}|\mathbf{0}, c\rangle)^*=(-1)^{m_a+m_b}|\bar{\mathbf{m}}, c\rangle \tag{36a}$$

$$\bar{\mathbf{m}}\equiv(m_b, m_a) \tag{36b}$$

つまり，遷移 $|\mathbf{n}, c'\rangle\to|\mathbf{m}, c\rangle|\mathbf{l}, c''\rangle$ を，実質的に別の遷移 $|\bar{\mathbf{m}}, c\rangle|\mathbf{n}, c'\rangle\to|\mathbf{l}, c''\rangle$ と見なすことにより展開式（18）を適用できると同時に，この見直しに伴い期待される保存則 $c^2+c'^2=c''^2$ を条件（34）と両立させることができるのである。

参考文献

[1] Morse, P.M. and Feshbach, H. *Method of Theoretical Physics*（McGraw-Hill, New York 1953）Ch. 6.

[2] Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. *Table of Integrals, Series, and Products*（Academic Press, San Diego 1994）§8. 970.

[3] 森口繁一　宇田川久　一松信『数学公式Ⅲ－特殊関数－』（2002）§26.

[4] 高橋光一　『東北学院大学教養学部論集』**151**（2008）pp 143-146.

[5] 高橋光一　『東北学院大学教養学部論集』**153**（2009）pp 39-45.

[6] Miller, W. Jr. *Clebsch-Gordan Coefficients and Special Function Identities. II*, J. Math. Phys. **13**,（1972）827.