

【論 文】

力学的有効粘性モデルへの対称テンソルの導入と 一様乱流内の Reynolds 応力

高 橋 光 一

乱流の平均場理論である力学的有効粘性モデル Dynamical Effective Viscosity Model (DEVM) は、平均流速と粘性の場の力学系である。それは、並進不変性、Galilei 変換不変性と回転不変性に基づいてスカラー場とベクトル場によって構成された散逸理論であり、平行板乱流と円管乱流の平均流を閉じた基礎方程式系によって精度良く再現することに成功した。これを、テンソル場を取り込むように拡張し、Reynolds 応力と比較することを考える。この最初の試みは 2018 年になされていて、Reynolds 応力のある程度定性的に再現できることが判明している。しかしここでは、スカラー・ベクトルモデルで達成された平均流速の記述の成功を損なわないようにするためにテンソルのエルミット成分だけを考慮していて、その意味でモデルの構成法はいささか“作為的”であった。また、テンソルの運動方程式は対称テンソルに対するものではないため、流体の Reynolds 応力には直接に対応しなかった。本論文では、対称テンソルの運動方程式をより“自然に”構成する方法があることを示す。さらに、この“自然な”テンソルモデルを一様乱流に適用し、Reynolds 流体理論における数値シミュレーションの結果と比較し、矛盾がないことを確認する。また、Navier-Stokes 理論が、乱流を記述するにおいて最も敏感な臨界点の一つの上に乗っていることも明らかにされる。

重要語句：力学的有効粘性モデル，Reynolds 応力，一様乱流

1. DEVM の考え方

乱流は、その半微視的な—分子レベルより大きく、目視できるレベルよりも小さい—様相を絶え間なく変化させる流れで、それを支配するのは生まれては成長・分裂し消える渦の力学である。渦の一見乱雑な生成と消滅が平均流に捉らえどころのない揺らぎを生む。

複雑な現象を理解するためのさまざまな試みがある。流れの中を行き来する分子によって運動量が移送され粘性—これを分子粘性と呼ぶ—が生じるのと同じように、集団としての大

小ささまざまな渦の移動が運動量を移送し、それによって高次の粘性が生まれるという見方が可能になる。これが“渦粘性”という概念で、乱流の $k-\varepsilon$ モデルといった平均場理論をつくりあげる上で重要な礎石となっている。そのようなモデル構築の出発点となるのが次の Reynolds 応力方程式である：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} = -\frac{1}{\rho} \left(\overline{\tilde{u}_i \partial_j \bar{p}} + \overline{\tilde{u}_j \partial_i \bar{p}}\right) - \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_k \partial_k u_j} - \overline{\tilde{u}_j \tilde{u}_k \partial_k u_i} - \partial_k \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j \tilde{u}_k} + \nu \left(\nabla^2 \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} - 2 \partial_k \overline{\tilde{u}_i \partial_k \tilde{u}_j}\right) + \overline{\tilde{u}_i \bar{f}_j} + \overline{\tilde{u}_j \bar{f}_i}$$

\mathbf{u} は平均流速, \tilde{u}_i は平均からの揺らぎの第 i 成分, 上の横棒は平均, とくに $\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j}$ は Reynolds 応力, ρ は密度, \bar{f} は外からの体積力の揺らぎである。Reynolds 応力は乱流の中の規則性を窺い知るための量であり, その挙動を理論的に知ることが乱流力学の重要な目的の一つである。そのためには上の方程式を解けばよい。

しかしこのとき, 右辺に $\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j \tilde{u}_k}$ があるために, さらに $\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j \tilde{u}_k}$ の方程式が必要になる, ということが無限に繰り返され, Navier-Stokes 方程式を出発点とすることによって方程式が閉じなくなる“closure problem”が発生し, これを無理に閉じさせるためのいわゆる“モデル化”が必須となる。“モデル化”を何を重視して行うかによりさまざまな乱流モデルがつくられている (木田・柳瀬 1999, 高橋 2018a, 2018b)。

これに対し, DEVM は異なった方針で構築される (Takahashi 2017a, 2017b, 高橋 2018b)。DEVM では, 平均流速と有効粘性を表すベクトル場とスカラー場を複素数に拡張する。そして, それらを組み合わせて $GL(2, C)$ の要素-最も一般的な 2 行 2 列の行列-として Lagrangian を構成し, 作用 action に対する変分原理から場の運動方程式を導く。このとき, 場の虚部が Lagrange の未定乗数の役割を果たす。この点において DEVM は調和振動子の Bateman 系と似ている (Bateman 1931)。このときの作用はエネルギーとは直接の関係はないので, ここでは擬作用 pseudo-action (PA) と呼ぶことにする。有効粘性場理論の最大の特徴は, 流体を構成する個々の物理的要素の基本力学への詳細な考慮を払わなくとも Navier-Stokes 方程式という非線形理論を変分原理から正しく導くことができることにある。さらに, 変分原理から運動方程式を導くために, 乱流モデルを構成する際に“closure problem”に悩まされることもない。最後に, 出発点の擬作用が並進について不変なので, すべての過程で運動量は保存され物理要素間作用反作用の法則が自動的に成立する。平行板と円管の定常乱流の平均場については, 速度場に限れば閉じた方程式系で現象をきわめて良く再現できる。

Reynolds 応力は (2 階の) テンソルである。そこで, 同じ方針で DEVM にテンソル場を導入することを考えたい。テンソル場はやはり $GL(2, C)$ の行列場として統合的に表現する。そして, 流体要素間の力学の基本形を, 並進不変性, 回転不変性, Galilei 変換不変性を要求

することで決める。また、場の虚部が Lagrange の未定乗数であるということから、行列場がエルミットの時 Lagrangian は 0 とならなければならない。

DEVM を拡張する最初の試みは高橋 (2018b), Takahashi (2018) でなされた。平行板乱流での一部の Reynolds 応力は定性的に再現されたが、対角成分に実験とのずれが生じるという問題が残った。導入されたテンソルは、その運動方程式の解が非対称成分を含むので Reynolds 応力とは直接対応しないのである。それに対応する物理量があるのかも不明だった。この問題を克服する可能性は Takahashi (2019) によって指摘された。本論文ではその詳細を報告する。

平行板乱流や管乱流には現実的な興味がある。これらは渦を生成する壁が与える境界条件と渦の挙動が問題になる。境界の影響を受けない渦と乱流そのものの物理が全面に現れるものとして一様乱流があり、長い研究の歴史がある (例えば Davidson 2015)。普通の定常乱流は Reynolds 数がある値を越えたときに発生するが、一様乱流は Reynolds 数がゼロの現象である。本論文では、拡張された DEVM が明らかにする一様乱流の特質についても解説する。

2. テンソルの導入

我々の理論は次の 2 種の行列で構成されるものとする：

$$\Phi = \phi + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.0.1a)$$

$$\mathbf{R}_i = v_i + R_{ij} \sigma_j \quad (2.0.1b)$$

\mathbf{u} は複素平均流速, ϕ は複素有効粘性または渦粘性, $\boldsymbol{\sigma}$ は 2 行 2 列の Pauli 行列, R_{ij} はテンソルで Reynolds 応力を表すと期待されるもの, ベクトル集合 $\{\mathbf{v}\}$ は $GL(2, C)$ を構成する集合 $\{\mathbf{R}_i\}$ の中心である。下付添え字は空間成分を, その繰り返しは特に断らない限り和を取ることを意味するものとする。また, 添え字を明示しないときは, 以後ベクトルとテンソルを太字で表すことにする。 \mathbf{v} が何であるかは今の時点では分からない。 Φ から構成される DEVM は Takahashi (2017a, 2017b), 高橋 (2018a, b) で詳述した。以下では, 理論の \mathbf{R}_i 部分のみを考える。

2.1 移流 (Lagrange 微分) 項

Lagrangian (密度) の構成に際しては回転不変性と Galilei 変換不変性を考慮する。前者の要請から, Lagrangian は場の成分を指定する添え字について和の形をとっていないとなければならない。後者の要請からは, 高橋 (2018b) を参照して, 時間の 1 階微分を含む項は (本論文で

はデカルト座標系を採用する)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_i &= \frac{i}{2} \text{Tr}(\mathbf{R}_i^\dagger \partial_t \mathbf{R}_i) + \frac{i}{4} [\text{Tr}(\mathbf{R}_i^\dagger \boldsymbol{\sigma} \Phi \cdot \nabla \mathbf{R}_i) - \text{Tr}(\nabla \mathbf{R}_i^\dagger \Phi^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}_i)] \\ &= i \mathbf{R}_{ij}^* \dot{\mathbf{R}}_{ij} \\ &+ \frac{i}{2} (\partial_j \mathbf{R}_{ik} u_k \mathbf{R}_{ij}^* - \partial_l \mathbf{R}_{il} u_j \mathbf{R}_{ij}^* + \partial_k \mathbf{R}_{ij} u_k \mathbf{R}_{ij}^*) - \frac{i}{2} (\partial_k \mathbf{R}_{ij}^* u_j \mathbf{R}_{ik} - \partial_j \mathbf{R}_{ij}^* u_l \mathbf{R}_{il} + \partial_k \mathbf{R}_{ij}^* u_k \mathbf{R}_{ij}^*) \end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned} \mathcal{L}''_i &= \frac{i}{2} \text{Tr}(\mathbf{R}_i \partial_t \mathbf{R}_i^\dagger) + \frac{i}{4} [\text{Tr}(\mathbf{R}_i \boldsymbol{\sigma} \Phi \cdot \nabla \mathbf{R}_i^\dagger) - \text{Tr}(\nabla \mathbf{R}_i \Phi^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}_i^\dagger)] \\ &= i \mathbf{R}_{ij} \dot{\mathbf{R}}_{ij}^* \\ &+ \frac{i}{2} (\partial_k \mathbf{R}_{ij}^* u_j \mathbf{R}_{ik} - \partial_j \mathbf{R}_{ij}^* u_l \mathbf{R}_{il} + \partial_k \mathbf{R}_{ij}^* u_k \mathbf{R}_{ij}) - \frac{i}{2} (\partial_j \mathbf{R}_{ik} u_k \mathbf{R}_{ij}^* - \partial_l \mathbf{R}_{il} u_j \mathbf{R}_{ij}^* + \partial_k \mathbf{R}_{ij} u_k \mathbf{R}_{ij}^*) \end{aligned}$$

の形をしていることが導かれる。したがって、これらの線形結合

$$\mathcal{L}_i = a'_i \mathcal{L}'_i + a''_i \mathcal{L}''_i$$

が時間の 1 階微分のみを含む Lagrange 微分項の候補となる。

DEVM では、場の虚部が Lagrange 乗数の役割を果たす。言い換えれば、行列場がエルミットするとき Lagrangian は 0 になる。したがって $a'_i = -a''_i$ であり、時間の 1 階微分項の係数を i と規格化すると

$$a'_i = -a''_i = \frac{1}{2} \tag{2.1.1}$$

である。

この Lagrangian を時空間で積分したものが Lagrange 微分項に対する PA である。運動方程式は、PA の場の変数に関する変分をとって得られる。まず、以下の (1) と (2) に中心が無い場合の変分を求めておく。添え字 0 は中心が無い [$\mathbf{v} = \boldsymbol{\phi} = 0$] ことを意味する。例えば、 \mathcal{L}'_{i0} は \mathcal{L}'_i において $\mathbf{v} = \boldsymbol{\phi} = 0$ としていることを意味する。

(1) \mathcal{L}'_{i0} の変分

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}_{ij}^* &: i \dot{\mathbf{R}}_{ij} + \frac{i}{2} ((u_k^* + u_k) \partial_k \mathbf{R}_{ij} + \mathbf{R}_{ik} (\partial_k u_j^* - \partial_j u_k^*) - \mathbf{R}_{ij} \partial_k u_k^* + (u_j^* - u_j) \partial_k \mathbf{R}_{ik} - (u_k^* - u_k) \partial_j \mathbf{R}_{ik}) \\ \delta u_i^* &: i \dot{u}_i - \frac{i}{2} (\partial_k \mathbf{R}_{ji}^* \mathbf{R}_{jk} - \partial_k \mathbf{R}_{jk}^* \mathbf{R}_{ji} + \partial_i \mathbf{R}_{kj}^* \mathbf{R}_{kj}) \end{aligned}$$

(2) \mathcal{L}''_{i0} の変分

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}_{ij}^* &: -i \dot{\mathbf{R}}_{ij} - \frac{i}{2} ((u_k^* + u_k) \partial_k \mathbf{R}_{ij} + \mathbf{R}_{ik} (\partial_k u_j - \partial_j u_k) + \mathbf{R}_{ij} \partial_k u_k - (u_j^* - u_j) \partial_k \mathbf{R}_{ik} + (u_k^* - u_k) \partial_j \mathbf{R}_{ik}) \\ \delta u_i &: -\frac{i}{2} (\partial_k \mathbf{R}_{ji} \mathbf{R}_{jk}^* - \partial_k \mathbf{R}_{jk} \mathbf{R}_{ji}^* + \partial_i \mathbf{R}_{kj} \mathbf{R}_{kj}^*) \end{aligned}$$

$a'_i = -a''_i = 1/2$ であるので、 \mathcal{L}'_{i0} の変分から導かれる項はそれぞれの変分に対し

$$\begin{aligned}\delta R_{ij}^* &: i\dot{R}_{ij} + i(\text{Re}u_k \partial_k R_{ij} + R_{ik}(\partial_k \text{Re}u_j - \partial_j \text{Re}u_k)) - R_{ij} \partial_k \text{Im}u_k + \text{Im}u_j \partial_k R_{ik} \\ \delta u_i^* &: -\frac{i}{4}(R_{jk} \partial_k R_{ji}^* - R_{jk}^* \partial_k R_{ji} - R_{ji} \partial_k R_{jk}^* + R_{ji}^* \partial_k R_{jk} + R_{kj} \partial_i R_{kj}^* - R_{kj}^* \partial_i R_{kj})\end{aligned}$$

となる。最後に虚部を 0 として全ての場を実数とすると、全体に $-i$ を掛けたものは

$$\begin{aligned}\delta R_{ij}^* &: \dot{R}_{ij} + \mathbf{u} \cdot \nabla R_{ij} + R_{ik}(\partial_k u_j - \partial_j u_k) \\ \delta u_i^* &: 0\end{aligned}$$

である。テンソルについては、 $\mathbf{u} \cdot \nabla R_{ij}$ によって記述される移流には渦度 $\partial_k u_j - \partial_j u_k$ との相互作用が伴うこと、速度場への寄与は 0 であることに注意されたい。

最後の点についてコメントを与えておく。我々が採用する Lagrangian は

$$\mathcal{L} \sim i(F(\Phi^\dagger, \Phi, \mathbf{R}, \mathbf{R}^\dagger) - F(\Phi^\dagger, \Phi, \mathbf{R}^\dagger, \mathbf{R})),$$

の形をしている。 F は特別な場合として $i(G(\Phi^\dagger) + G(\Phi))(H(\mathbf{R}^\dagger) - H(\mathbf{R}))$ の形も含む (Takahashi 2018)。速度場運動方程式への寄与は、Lagrangian の Φ に関する変分をとり、 σ を掛けてトレースをとれば得られ

$$\text{Tr} \left[\sigma \frac{\delta}{\delta \Phi^\dagger} (F(\Phi^\dagger, \Phi, \mathbf{R}, \mathbf{R}^\dagger) - F(\Phi^\dagger, \Phi, \mathbf{R}^\dagger, \mathbf{R})) \right]$$

の形を持つ。意味のある古典的運動方程式は $\mathbf{R} = \mathbf{R}^\dagger$ とすることで得られるが、これによって上式は 0 になることがすぐに分かる。有効粘性場 ϕ についても同様である。すなわち、ベクトル行列 \mathbf{R}, \mathbf{R} の導入で ϕ, \mathbf{u} の運動方程式は最終的には影響を受けない。これは、Reynolds 流体理論で一様乱流を記述するとき、平均流速の運動方程式に Reynolds 応力は寄与しないという事実を一般化したものになっている。

(3) 中心がある場合の Lagrange 微分項の変分と相互作用の対称化

(1) と (2) では中心が無い場合を考えた。ここでは中心がある一添え字の 0 が無い変数で表す—とどうなるかを見る。結果は

$$\begin{aligned}\delta_R \mathcal{L}'_L &= \delta_R \mathcal{L}'_{L0} + \frac{i}{2} \partial_j (\phi^* v_i) + \frac{i}{2} \phi \partial_j v_i, \\ \delta_R \mathcal{L}''_L &= \delta_R \mathcal{L}''_{L0} - \frac{i}{2} \partial_j (\phi v_i) - \frac{i}{2} \phi^* \partial_j v_i\end{aligned}$$

となる。 δ_R は R_{ij} について変分を取ったことを表す。これは添え字 i, j に関し対称でない。このような非対称性は実は既に Lagrange 微分項にも現れていたことを思い出そう。 R_{ij} を直接 Reynolds 応力に対応させたい場合、これは不都合なことである。この問題は、 R_{ij} の代わりに対称化された行列

$$\begin{aligned}S_{ij} &\equiv (R_{ij} + R_{ji})/2 \\ S_i &= v_i + S_{ij} \sigma_j \equiv v_i + \hat{S}_i\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

を用い、相互作用項—いまの場合は移流項—を

$$\mathcal{L}'_L = \frac{i}{2} \text{Tr}(\mathbf{R}_i^\dagger \partial_t \mathbf{R}_i) + \frac{i}{4} \text{Tr}[(\mathbf{S}_i^\dagger \boldsymbol{\sigma} \Phi \cdot \nabla \mathbf{S}_i) - (\nabla \mathbf{S}_i^\dagger \Phi^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{S}_i)]$$

または

$$\mathcal{L}''_L = \frac{i}{2} \text{Tr}(\mathbf{R}_i \partial_t \mathbf{R}_i^\dagger) + \frac{i}{4} \text{Tr}[(\mathbf{S}_i \boldsymbol{\sigma} \Phi \cdot \nabla \mathbf{S}_i^\dagger) - (\nabla \mathbf{S}_i \Phi^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{S}_i^\dagger)]$$

のようにして導入することで解決可能である。第 1 項が前と同じく \mathbf{R} で表されているのは、独立な力学変数が \mathbf{R} であることによる。これらは場の変数を用いて次のように表される：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_L &= \mathcal{L}'_{L0} + \frac{i}{2} (v_i^* \dot{v}_i - v_i \dot{v}_i^*) + \frac{1}{2} \varepsilon_{jmk} \partial_m v_i^* u_j^* S_{ik} + \frac{1}{2} \varepsilon_{lmk} \partial_m S_{il}^* \phi^* S_{ik} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ljm} \partial_m S_{il}^* u_j^* v_i \\ &\quad - \frac{i}{2} (\partial_k v_i^* \phi^* S_{ik} + \partial_j v_i^* u_j^* v_i + \partial_i S_{il}^* \phi^* v_i) \\ &\quad + \frac{1}{2} \varepsilon_{jmk} \partial_m v_i u_j S_{ik}^* + \frac{1}{2} \varepsilon_{lmk} \partial_m S_{il} \phi S_{ik}^* + \frac{1}{2} \varepsilon_{ljm} \partial_m S_{il} u_j v_i \\ &\quad + \frac{i}{2} (\partial_k v_i \phi S_{ik}^* + v_i^* u_j \partial_j v_i + \partial_i S_{il} \phi v_i^*) \\ \mathcal{L}''_L &= \mathcal{L}''_{L0} - \frac{i}{2} (v_i^* \dot{v}_i - v_i \dot{v}_i^*) + \frac{1}{2} \varepsilon_{jmk} S_{ik}^* \partial_m v_i u_j^* + \frac{1}{2} \varepsilon_{jmk} S_{ik}^* \partial_m S_{ij} \varphi^* + \frac{1}{2} \varepsilon_{jkm} \partial_m S R_{ij} u_k^* v_i^* \\ &\quad - \frac{i}{2} (S_{ij}^* \partial_j v_i \varphi^* + \partial_j v_i u_j^* v_i^* + \partial_j S_{ij} \varphi^* v_i^*) \\ &\quad + \frac{1}{2} \varepsilon_{jmk} \partial_m v_i^* u_j S_{ik} + \frac{1}{2} \varepsilon_{jmk} \partial_m S_{ij}^* \varphi S_{ik} + \frac{1}{2} \varepsilon_{jkm} \partial_m S_{ij}^* u_k v_i \\ &\quad + \frac{i}{2} (\partial_j v_i^* \varphi S_{ij} + \partial_j v_i^* u_j v_i + \partial_j S_{ij}^* \varphi v_i) \end{aligned}$$

ε_{ijk} は 3 階の反対称テンソル ($\varepsilon_{123}=1$) である。 \mathcal{L}'_{L0} と \mathcal{L}''_{L0} は ϕ と \mathbf{v} を 0 としたときの Lagrangian で

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{L0} &= i \mathbf{R}_{ij}^* \dot{\mathbf{R}}_{ij} \\ &\quad - \frac{i}{2} (\partial_k S_{ij}^* u_j^* S_{ik} - \partial_j S_{ij}^* u_i^* S_{il} + \partial_k S_{ij}^* u_k^* S_{ij}) + \frac{i}{2} (\partial_j S_{ik} u_k S_{ij}^* - \partial_l S_{il} u_j S_{ij}^* + \partial_k S_{ij} u_k S_{ij}^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}''_{L0} &= i \mathbf{R}_{ij} \dot{\mathbf{R}}_{ij}^* \\ &\quad - \frac{i}{2} (\partial_j S_{ik} u_k S_{ij}^* - \partial_l S_{il} u_i^* S_{ij}^* + \partial_k S_{ij} u_k S_{ij}^*) + \frac{i}{2} (\partial_k S_{ij}^* u_j S_{ik} - \partial_j S_{ij}^* u_l S_{il} + \partial_k S_{ij}^* u_k S_{ij}) \end{aligned}$$

で与えられる。

ここで \mathbf{R}_{ij}^* についての変分を取ってみる。 $\delta_R S_{kl} = (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})/2$ であるから

$$\begin{aligned} \delta_R \mathcal{L}'_L &= \delta_R \mathcal{L}'_{L0} \\ &\quad + \frac{1}{4} [\varepsilon_{jkm} (\partial_m (\varphi^* S_{ik}) - \partial_m (u_k^* v_i) + \partial_m v_i u_k + \partial_m S_{ik} \varphi) + i \partial_j (\varphi^* v_i) + i \partial_j v_i \varphi + (i \leftrightarrow j)] \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

$$\begin{aligned} \delta_R \mathcal{L}'_{L0} &= i \dot{\mathbf{R}}_{ij} \\ &\quad + \frac{i}{4} [\partial_k (u_j^* S_{ik}) - \partial_j (u_k^* S_{ik}) + \partial_k (u_k^* S_{ij}) + u_k \partial_j S_{ik} - u_j \partial_k S_{ik} + u_k \partial_k S_{ij} + (i \leftrightarrow j)] \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

$$\delta_R \mathcal{L}'_L = \delta_R \mathcal{L}'_{L0} + \frac{1}{4} \left[\varepsilon_{jkm} \left(\partial_m v_i u_k^* + \partial_m S_{ik} \phi^* + \partial_m (\phi S_{ik}) - \partial_m (u_k v_i) \right) - i \phi^* \partial_j v_i - i \partial_j (\phi v_i) + (i \leftrightarrow j) \right] \quad (2.1.5)$$

$$\delta_R \mathcal{L}''_{L0} = -i \dot{R}_{ij} - \frac{i}{4} \left[u_k^* \partial_j S_{ik} - u_j^* \partial_k S_{ik} + u_k^* \partial_k S_{ij} + \partial_k (u_j S_{ik}) - \partial_j (u_k S_{ik}) + \partial_k (u_k S_{ij}) + (i \leftrightarrow j) \right] \quad (2.1.6)$$

ここで $-i \delta_R \mathcal{L}_{L0} \equiv -i (\delta_R \mathcal{L}'_{L0} - \delta_R \mathcal{L}''_{L0}) / 2$ の Galilei 変換性は, \mathbf{c} を実ベクトルとして

$$\begin{aligned} t' &= t, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{c}t, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{c}, \quad \delta \mathbf{u}' = \delta \mathbf{u} \\ \partial_{t'} &= \frac{\partial t}{\partial t'} \partial_t + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t'} \nabla = \partial_t + \mathbf{c} \cdot \nabla, \quad \nabla' = \nabla \\ \mathbf{R}_i &\rightarrow \mathbf{R}'_i = \mathbf{R}_i, \quad \Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \mathbf{c} \cdot \sigma \end{aligned}$$

のもとで

$$-i \delta_R \mathcal{L}_{L0} \rightarrow \dot{R}_{ij} + \mathbf{u} \cdot \nabla R_{ij} + \mathbf{c} \cdot \nabla R_{ij} - \mathbf{c} \cdot \nabla S_{ij}$$

である。 i と j を入れ替えたものを引算すると右辺は

$$\frac{\partial}{\partial t} (R_{ij} - R_{ji}) + \mathbf{u} \cdot \nabla (R_{ij} - R_{ji}) + \mathbf{c} \cdot \nabla (R_{ij} - R_{ji})$$

となる。これも Galilei 変換で不変であるべしという要求からテンソル $R_{ij} - R_{ji} = r_{ij}$ は定数でなければならない。とくに $r_{ij} = 0$ とすれば

$$R_{ji} = R_{ij} \quad (2.1.7)$$

すなわち R は対称テンソルとなる。これは R が Reynolds 応力に対応するためには好ましい性質である。事実, S_{ij} が対称であるため, 我々の運動方程式のもとで (2.1.7) は実現されるのである。変分式 (2.1.3)~(2.1.6) で場の 2 次の項は S_{ij} の対称性のために i と j の入れ替えで不変になっていて, $\delta_R \mathcal{L}'_{L0} = 0$ あるいは $\delta_R \mathcal{L}''_{L0} = 0$ は R_{ij} と R_{ji} についてそれぞれ同じ方程式を与える。よって, 境界条件が同じであれば同じ解を与えるので, 常に $R_{ij} = R_{ji}$ が保証される。こうして, 上記の変分式は $i \leq j$ だけ考えればよく

$$\begin{aligned} \delta_R \mathcal{L}'_L &= \delta_R \mathcal{L}'_{L0} + \frac{i}{4} \left((\phi^* + \phi) (\partial_i v_j + \partial_j v_i) + v_i \partial_j \phi^* + v_j \partial_i \phi^* \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[\varepsilon_{jkm} \left(2 \partial_m (\phi^* R_{ik}) - \partial_m (u_k^* v_i) + \partial_m v_i u_k + 2 \phi \partial_m R_{ik} \right) + (i \leftrightarrow j) \right] \\ \delta_R \mathcal{L}'_{L0} &= i \dot{R}_{ij} + \frac{i}{2} (\mathbf{u}^* + \mathbf{u}) \cdot \nabla R_{ij} + \frac{i}{4} R_{ik} (\partial_k u_j^* - \partial_j u_k^*) + \frac{i}{4} R_{jk} (\partial_k u_i^* - \partial_i u_k^*) + \frac{i}{2} R_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \\ &\quad + \frac{i}{4} \left((u_j^* - u_j) \partial_k R_{ik} + (u_i^* - u_i) \partial_k R_{jk} - (u_k^* - u_k) (\partial_i R_{jk} + \partial_j R_{ik}) \right) \end{aligned}$$

表 1 中心の無い行列場によって構成される Lagrangian から, 変分 δR_{ij}^* によって生じる項。全体に $-i$ を掛けている。第 3 列は, 場を実数化し $S_{kl} = 2R_{kl}$ とおいたもの。(便宜上, S_{ij} の定義を因子 2 だけ変えている。表 2, 3 も同様。)

$\delta_R \mathcal{L}_{10}$	$\begin{aligned} & \dot{R}_{ij} + \frac{1}{16} [S_{ik}(\partial_i(u_j^* + u_j) - \partial_j(u_k^* + u_k)) + S_{jk}(\partial_k(u_i^* + u_i) - \partial_i(u_k^* + u_k))] \\ & + \frac{1}{4}(\mathbf{u}^* + \mathbf{u}) \cdot \nabla S_{ij} + \frac{1}{8} S_{ij} \nabla \cdot (\mathbf{u}^* + \mathbf{u}) \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \dot{R}_{ij} + \mathbf{u} \cdot \nabla R_{ij} + \frac{1}{4} (R_{ik}(\partial_i u_j - \partial_j u_k) + R_{jk}(\partial_k u_i - \partial_i u_k)) \\ & + \frac{1}{2} R_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$
$\delta_R \mathcal{L}_{k0}$	$-\frac{1}{2} a_k^i \nabla^2 S_{ij}^* - \frac{1}{4} a_k^i \partial_m (\partial_i S_{mj}^* + \partial_j S_{mi}^*)$	$-a_k^i \nabla^2 R_{ij} - \frac{1}{2} a_k^i \partial_m (\partial_i R_{mj} + \partial_j R_{mi})$
$\delta_R \mathcal{L}_{i0}$	$\frac{1}{4} S_{ik} (\partial_j (u_k^* + u_k) - \partial_k (u_j^* + u_j)) + \frac{1}{4} S_{jk} (\partial_i (u_k^* + u_k) - \partial_k (u_i^* + u_i))$	$R_{ik} (\partial_j u_k - \partial_k u_j) + R_{jk} (\partial_i u_k - \partial_k u_i)$
$\delta_R \mathcal{L}_{20}$	$\frac{1}{4} S_{ik} (\partial_j (u_k^* + u_k) - \partial_k (u_j^* + u_j)) + \frac{1}{4} S_{jk} (\partial_i (u_k^* + u_k) - \partial_k (u_i^* + u_i))$	$R_{ik} (\partial_j u_k - \partial_k u_j) + R_{jk} (\partial_i u_k - \partial_k u_i)$
$\delta_R \mathcal{L}_{30}$	$\frac{1}{4} S_{ik}^* (\partial_j u_k^* + \partial_k u_j^*) + \frac{1}{4} S_{jk}^* (\partial_i u_k^* + \partial_k u_i^*) - \frac{1}{2} S_{ij}^* \nabla \cdot \mathbf{u}^*$	$\frac{1}{2} R_{ik} (\partial_j u_k + \partial_k u_j) + \frac{1}{2} R_{jk} (\partial_i u_k + \partial_k u_i) - R_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u}$
$\delta_R \mathcal{L}'_{30}$	$\frac{1}{4} S_{ik} (\partial_j u_k + \partial_k u_j) + \frac{1}{4} S_{jk} (\partial_i u_k + \partial_k u_i) - \frac{1}{2} S_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u}$	$\frac{1}{2} R_{ik} (\partial_j u_k + \partial_k u_j) + \frac{1}{2} R_{jk} (\partial_i u_k + \partial_k u_i) - R_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u}$
$\delta_R \mathcal{L}_{40}$	$\frac{1}{4} \delta_{ij} S_{ik} \partial_l (u_k^* + u_k) - \frac{1}{8} S_{ik} (\partial_i (u_j^* + u_j) + \partial_j (u_i^* + u_i))$	$\delta_{ij} R_{ik} \partial_l u_k - \frac{1}{2} R_{ik} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)$
$\delta_R \mathcal{L}_{50}$	$\frac{1}{4} \delta_{ij} S_{ik} \partial_l (u_k^* + u_k) - \frac{1}{8} S_{ik} (\partial_i (u_j^* + u_j) + \partial_j (u_i^* + u_i))$	$\delta_{ij} R_{ik} \partial_l u_k - \frac{1}{2} R_{ik} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)$

表2 中心がある行列場によって構成される Lagrangian から, 変分 δR_{ij}^* によって生じる項。全体に $-i$ を掛けている。第3列は, 場を実数化し $S_{kl} = 2R_{kl}$ とおいたもの。

$\delta_R \mathcal{L}_1$	$\delta_R \mathcal{L}_{10} + \frac{1}{16} (\partial_i ((\phi^* + \phi) v_i) + \partial_j ((\phi^* + \phi) v_j)) + \frac{1}{16} (\phi^* + \phi) (\partial_i v_j + \partial_j v_i),$	$\delta_R \mathcal{L}_{10} + \delta_R \mathcal{L}_{30} + \frac{1}{4} (\partial_i (\phi v_i) + \partial_j (\phi v_j)) + \frac{1}{4} \phi (\partial_i v_j + \partial_j v_i)$
$\delta_R \mathcal{L}_K$	$-\frac{1}{2} \nabla \cdot ((a_{kk} + b_{kk} \phi) \nabla S_{ij}) - \frac{1}{4} (\partial_i (a_{kk}'' + b_{kk}'' \phi) \partial_m S_{jm} + \partial_j (a_{kk}'' + b_{kk}'' \phi) \partial_m S_{im})$	$-\nabla \cdot ((a_{kk} + b_{kk} \phi) \nabla R_{ij})$ $-\frac{1}{2} (\partial_i (a_{kk}'' + b_{kk}'' \phi) \partial_m R_{jm} + \partial_j (a_{kk}'' + b_{kk}'' \phi) \partial_m R_{im})$
$\delta_R \mathcal{L}_1$	$\delta_R \mathcal{L}_{10}$	$\delta_R \mathcal{L}_{10}$
$\delta_R \mathcal{L}_2$	$\delta_R \mathcal{L}_{20}$	$\delta_R \mathcal{L}_{20}$
$\delta_R \mathcal{L}_3$	$\delta_R \mathcal{L}_{30} + \frac{1}{4} (v_i^* \partial_j \phi^* + v_j^* \partial_i \phi^*)$	$\delta_R \mathcal{L}_{30} + \frac{1}{2} (v_i \partial_j \phi + v_j \partial_i \phi)$
$\delta_R \mathcal{L}'_3$	$\delta_R \mathcal{L}'_{30} + \frac{1}{4} (v_i^* \partial_j \phi + v_j^* \partial_i \phi)$	$\delta_R \mathcal{L}'_{30} + \frac{1}{2} (v_i \partial_j \phi + v_j \partial_i \phi)$
$\delta_R \mathcal{L}_4$	$\delta_R \mathcal{L}_{40} + \frac{1}{2} \delta_{ij} v \cdot \nabla (\phi^* + \phi) - \frac{1}{4} (v_j \partial_i (\phi^* + \phi) + v_i \partial_j (\phi^* + \phi))$	$\delta_R \mathcal{L}_{40} + 2 \delta_{ij} v \cdot \nabla \phi - v_j \partial_i \phi - v_i \partial_j \phi$
$\delta_R \mathcal{L}'_5$	$-\delta_R \mathcal{L}_4 + \frac{1}{2} \delta_{ij} (v_k \partial_k (\phi^* - \phi) + S_{kl} \partial_k (u_l^* - u_l)) - \frac{1}{2} S_{kk} (\partial_i (u_j^* - u_j) + \partial_j (u_i^* - u_i))$	$-\delta_R \mathcal{L}_4$

$$\begin{aligned} \delta_R \mathcal{L}'' &= \delta_R \mathcal{L}''_0 - \frac{i}{4} \left((\phi^* + \phi) (\partial_j v_i + \partial_i v_j) + v_i \partial_j \phi + v_j \partial_i \phi \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[\varepsilon_{ijk} (\partial_m v_i u_k^* + 2 \partial_m R_{ik} \phi^* + 2 \partial_m (\phi R_{ik}) - \partial_m (u_k v_i)) + (i \leftrightarrow j) \right] \\ \delta_R \mathcal{L}''_0 &= -i \dot{R}_{ij} - \frac{i}{2} (\mathbf{u}^* + \mathbf{u}) \cdot \nabla R_{ij} - \frac{i}{4} R_{ik} (\partial_k u_j - \partial_j u_k) - \frac{i}{4} R_{jk} (\partial_k u_i - \partial_i u_k) - \frac{i}{2} R_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \\ &\quad + \frac{i}{4} \left((u_j^* - u_j) \partial_k R_{ik} + (u_i^* - u_i) \partial_k R_{jk} - (u_k^* - u_k) (\partial_j R_{ik} + \partial_i R_{jk}) \right) \end{aligned}$$

と表すことができる。このとき、 $\delta_R \mathcal{L}'_0$ と $\delta_R \mathcal{L}''_0$ はそれぞれ場の実数化で Galilei 変換不変性を保っている。

$\delta_R \mathcal{L}'_0$ と $\delta_R \mathcal{L}''_0$ では、Lagrange 微分の他にテンソルと渦度（第 3,4 項）およびテンソルと体積変化の相互作用（第 5 項）が現れる。これらの相互作用の強さが一意的に定まっていることに注意せよ。変分原理に Galilei 変換不変性を取り入れた結果である。

最後に、 $a'_i = -a''_i = 1/2$ の値を用いて $\mathcal{L}_0 = a'_i \mathcal{L}'_0 + a''_i \mathcal{L}''_0$ と $\mathcal{L}_i = a'_i \mathcal{L}'_i + a''_i \mathcal{L}''_i$ を構成する。そして上と同様にして、 v_i^* についての変分をとると

$$\delta_v \mathcal{L}_i = i \dot{v}_i + \frac{i}{4} \left[\nabla \cdot ((\mathbf{u}^* + \mathbf{u}) v_i) + (\mathbf{u}^* + \mathbf{u}) \cdot \nabla v_i + \partial_k ((\phi^* + \phi) S_{ik}) + (\phi^* + \phi) \partial_k S_{ik} \right]$$

となる。場を実数化したとき、右辺第 2 項は移流項 $i \mathbf{u} \cdot \nabla v_i$ を含む。ここまでの結果を表 1 と表 2 の第 2 列にまとめておく。

2.2. 散逸項

流体の力学で移流項と並んで重要なのは、場に空間変動があるときに効果を生む散逸項である。不変性の条件を満たすテンソル場の最低次の空間変動項として次のものが可能である：

$$\mathcal{L}_{K0} = a'_K \mathcal{L}'_{K0} + a''_K \mathcal{L}''_{K0}$$

ここで中心無しの Lagrangian は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{K0} &= \frac{i}{4} \text{Tr} \left((\partial_i \hat{S}_j^\dagger)^2 - (\partial_i \hat{S}_j)^2 \right) = \frac{i}{2} (\nabla S_{jk}^* \cdot \nabla S_{jk}^* - \nabla S_{jk} \cdot \nabla S_{jk}) \\ \mathcal{L}''_{K0} &= \frac{i}{4} \text{Tr} \left((\partial_i \hat{S}_i^\dagger)^2 - (\partial_i \hat{S}_i)^2 \right) = \frac{i}{2} (\partial_i S_{ik}^* \partial_j S_{jk}^* - \partial_i S_{ik} \partial_j S_{jk}) \end{aligned}$$

で、 \hat{S} は (2.1.2) で定義されており、 a'_K と a''_K は実定数である。 \mathcal{L}_{K0} の変分については

$$\begin{aligned} \delta_R \mathcal{L}_{K0} &= -\frac{i}{2} a'_K \nabla^2 (R_{ij}^* + R_{ji}^*) - \frac{i}{4} a''_K \partial_m (\partial_i (R_{mj}^* + R_{jm}^*) + \partial_j (R_{mi}^* + R_{im}^*)) \\ &= -i a'_K \nabla^2 R_{ij}^* - \frac{i}{2} a''_K \partial_m (\partial_i R_{mj}^* + \partial_j R_{mi}^*) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

となる。2 行目に移るときに R_{ij} が対称テンソルとしている。 a'_k がテンソル場の散逸係数である。

次に、 R_i に中心を持たせて \mathcal{L}_{K0} を一般化する。 DEVM では、散逸係数はスカラー場 Φ の中の渦粘性係数の役割を果たす有効粘性係数を通して速度場と関係づけられていると考えるので、同時に上の a'_k 、 a''_k を Φ を含むように拡張しよう。このとき Galilei 変換で不変な $\text{Tr}\Phi$ 、 $\nabla\Phi$ 等を使うが、微分の階数を上げないために最初のものだけを使うことにする。すると、新しい実数定数 b'_k 、 b''_k を導入して

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{dif}} = & \frac{i}{4} \left(a'_b + \frac{1}{4} b'_b \text{Tr}(\Phi^\dagger + \Phi) \right) \text{Tr} \left((\partial_i S_i^\dagger)^2 - (\partial_i S_i)^2 \right) \\ & + \frac{i}{4} \left(a''_b + \frac{1}{4} b''_b \text{Tr}(\Phi^\dagger + \Phi) \right) \text{Tr} \left((\partial_i S_i^\dagger)^2 - (\partial_i S_i)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

である。 Φ は (2.0.1a)、 S_i は (2.1.2) で与えられる。中心がないときは $\text{Tr}\Phi = 0$ なので \mathcal{L}_{K0} そのものに等しい。

2.3. 自然減衰項

散逸項は、隣接する要素間に状態の違いがあるときに、それを均一化しようとする傾向を生む。いま、平均流速が 0 であるが Reynolds 応力が空間的に一様に存在している仮想的な状態——一様乱流——を考える。これは、外部からの平均すると一様だが乱雑なエネルギーの局所的注入で実現できるだろう。局所的なエネルギーの不均一が局所的に乱雑な流れを生み、全体的に一様な乱流が維持されていると考えるのである。次にエネルギーの注入を一斉に停止する。粘性により、この乱流はある速さで減衰するはずである。このときの減衰は平均流の速度勾配の存在とは無関係で、流体の物性のみによる。そのような自然減衰を引き起こす項のうち最低次のものは

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g = & \frac{i}{8} g_0 \left(\left(\text{Tr}(\sigma_i S_i^\dagger) \right)^2 - c.c. \right) + \frac{i}{4} g_1 \left(\text{Tr}(S_i^{\dagger 2}) - c.c. \right) \\ = & \frac{i}{2} g_0 \left(\left(R_{ii}^* \right)^2 - c.c. \right) + \frac{i}{2} g_1 \left(S_{ij}^{*2} - c.c. \right) \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

である。 $c.c.$ は前項の複素共役を表す。変分をとると

$$\delta_R \mathcal{L}_g = i g_0 \delta_{ij} R_{kk}^* + i g_1 S_{ij}^*$$

となる。この形は Takahashi (2018) によって導入された。

基本となる Lagrangian は \mathcal{L}_L 、 \mathcal{L}_K 、 \mathcal{L}_g の和で与えられる。

3. その他の相互作用

これまでと同じ方針で、その他の相互作用項も $S_i, S_i^\dagger, \nabla\Phi, \nabla\Phi^\dagger, \sigma$ の組み合わせで生成できる。場と微分の次数が最も低く単純なものは、 \mathbf{R} と Φ の混合 -mixing- が無いと仮定すると 3 次の相互作用

$$\mathcal{L}_1 = \frac{i}{4} \text{Tr}(\sigma[S_i^\dagger, S_i] \cdot \nabla\Phi^\dagger) + c.c.$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{i}{4} \text{Tr}(\sigma \cdot \nabla\Phi^\dagger [S_i, S_i^\dagger]) + c.c.$$

$$\mathcal{L}_3 = \frac{i}{4} \text{Tr}(\sigma S_i^\dagger \cdot \nabla(\Phi^\dagger + \Phi) S_i^\dagger) + c.c.$$

である。複素共役項 (*c.c.*) を加えているのは全体を実数にするためである。 \mathcal{L}_1 と \mathcal{L}_2 は、 S_i と S_i^\dagger の交換子 $[S_i^\dagger, S_i]$ を含むため場を実数 (行列場をエルミット) にすると自動的に 0 になる。 \mathcal{L}_3 も同様である。

また、 σ と $\mathbf{S}=(S_1, S_2, S_3)$ の縮約をとることで回転不変な項をつくることのできる。それらは

$$\mathcal{L}_4 = \frac{i}{4} [\text{Tr}(\sigma_i S_i^\dagger S_j \partial_j \Phi^\dagger) - \text{Tr}(\sigma_i \partial_j \Phi S_j^\dagger S_i) - \text{Tr}(\sigma_i S_i S_j^\dagger \partial_j \Phi^\dagger) + \text{Tr}(\sigma_i \partial_j \Phi S_j S_i^\dagger)]$$

$$\mathcal{L}_5 = \frac{i}{4} [\text{Tr}(\sigma_i S_i \partial_j \Phi S_j) - \text{Tr}(\sigma_i S_j \partial_j \Phi S_i) - \text{Tr}(\sigma_i S_i \partial_j \Phi S_j) + \text{Tr}(\sigma_i S_j \partial_j \Phi S_i)]$$

これらは、カギ括弧の中の第 1 項と第 2 項、および第 3 項と第 4 項が互いに複素共役なので実数である。また、全ての行列場がエルミットのとき 0 になるので、DEVM の条件を満たしている。したがって、以下では \mathbf{R} に関する変分だけを考えればよい。 $\phi = \mathbf{v} = 0$ の場合の Lagrangian には添え字 0 を付けることにすると、 $R_{ij}^* (= R_{ji}^*)$ の変分によって生じる項は以下のようになる：

$$\delta_R \mathcal{L}_{10} = \frac{i}{2} S_{ik} (\partial_j (u_k^* + u_k) - \partial_k (u_j^* + u_j)) + \frac{i}{2} S_{jk} (\partial_i (u_k^* + u_k) - \partial_k (u_i^* + u_i))$$

$$\delta_R \mathcal{L}_{20} = \frac{i}{2} S_{ik} (\partial_j (u_k^* + u_k) - \partial_k (u_j^* + u_j)) + \frac{i}{2} S_{jk} (\partial_i (u_k^* + u_k) - \partial_k (u_i^* + u_i))$$

$$\delta_R \mathcal{L}_{30} = \frac{i}{4} S_{ik}^* (\partial_j (u_k^* + u_k) + \partial_k (u_j^* + u_j)) + \frac{i}{2} S_{jk}^* (\partial_i (u_k^* + u_k) + \partial_k (u_i^* + u_i)) - i S_{ij}^* \partial_k (u_k^* + u_k)$$

$$\delta_R \mathcal{L}_{40} = \frac{i}{2} \delta_{ij} S_{ik} \partial_l (u_k^* + u_k) - \frac{i}{4} S_{kk} (\partial_i (u_j^* + u_j) + \partial_j (u_i^* + u_i))$$

$$\delta_R \mathcal{L}_{\delta 0} = \frac{i}{2} \delta_{ij} S_{ik} \partial_l (u_k^* + u_k) - \frac{i}{4} S_{kk} (\partial_i (u_j^* + u_j) + \partial_j (u_i^* + u_i))$$

Reynolds 応力の時間変動の原因としては、圧力を含む外力 $-\nabla p / \rho + \mathbf{f}$ の揺らぎと速度場の揺らぎの積の平均がある。これは揺らく外力が流体になす仕事である。これに対応する量としてベクトル \mathbf{P} (これは外的条件なので実数とする) を導入し、 $\mathbf{P} \equiv P_i \sigma_i$ を使い

$$\mathcal{L}_P = \frac{i}{2} \text{Tr}(\partial_i \mathbf{P} (S_i^* - S_i)) = i \partial_i P_j (S_{ij}^* - S_{ij})$$

も用意しておく。 R_{ij}^* に関する変分は

$$\delta_R \mathcal{L}_P = i (\partial_i P_j + \partial_j P_i)$$

となる。

4. 中心がある場合の変分

次に中心がある, すなわち $\phi \neq 0, \mathbf{v} \neq 0$ の場合の Lagrangian 密度 ($\mathcal{L}_K, \mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_6$ 等添え字の"0"を除いた記号で表す) の v_i^* に関する変分を求める。 \mathcal{L}'_i と \mathcal{L}''_i については前節で結果を与えている。

式 (2.2.2) で与えられる \mathcal{L}_K において中心を明記すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K = & \frac{i}{4} (a'_K + b'_K \phi^*) \left((\nabla v_i^*)^2 + \nabla S_{jk}^* \cdot \nabla S_{jk}^* - (\nabla v_i)^2 - \nabla S_{jk} \cdot \nabla S_{jk} \right) \\ & + \frac{i}{4} (a''_K + b''_K \phi) \left((\nabla \cdot \mathbf{v}^*)^2 + \partial_i S_{ik}^* \partial_j S_{jk}^* - (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 - \partial_i S_{ik} \partial_j S_{jk} \right) + c.c. \end{aligned} \quad (4.1)$$

である。乱流を記述する上で最も重要な相互作用は、既に述べたように微小な渦を媒介してエネルギーの散逸を引き起こすものであると期待される。その場合の鍵となる物理量が渦粘性で、DEVM では Φ の積がつくる群の中心で表される。実際、上記の相互作用は、 \mathbf{v} と \mathbf{S} の散逸が中心である有効粘性 ϕ によっても起きることを表している。ただし、その強さは分らない。

R_{ij}^* に関する \mathcal{L}_K の変分によって生成される項は、変分後に場を実数にすると (4.1) より

$$\delta_R \mathcal{L}_K = -\frac{i}{2} \nabla \cdot ((a'_K + b'_K \phi) \cdot \nabla S_{ij}) - \frac{i}{4} (\partial_i (a''_K + b''_K \phi) \partial_m S_{jm} + \partial_j (a''_K + b''_K \phi) \partial_m S_{im}) + c.c.$$

である。 v_i^* に関する変分をとると

$$\delta_v \mathcal{L}_K = -\frac{i}{4} \nabla \cdot ((a'_K + b'_K \phi^*) \nabla v_i^*) - \frac{i}{4} \partial_i ((a''_K + b''_K \phi) \nabla \cdot \mathbf{v}^*) + c.c.$$

である。

表 3 中心がある行列場によって構成される Lagrangian から、変分 δv_i^* によって生じる項。全体に $-i$ を掛けている。第 3 列は、場を実数化し $S_{ik} = 2R_{ik}$ とおいたもの。

$\delta_i \mathcal{L}_1$	$v_i + \frac{1}{16} (\nabla \cdot (\mathbf{u}^* + \mathbf{u})) v_i + (\mathbf{u}^* + \mathbf{u}) \cdot \nabla v_i + \partial_i (\phi^* + \phi) S_{ii} + (\phi^* + \phi) \partial_i S_{ik}$	$v_i + \mathbf{u} \cdot \nabla v_i + \phi \partial_k R_{ik} + \frac{1}{2} (v \nabla \cdot \mathbf{u} + R_{ik} \partial_k \phi)$
$\delta_i \mathcal{L}_K$	$-\frac{1}{4} \nabla \cdot ((a_k + b_k \phi^*) \cdot \nabla v_i^*) - \frac{1}{4} \partial_i ((a_k' + b_k' \phi) \nabla \cdot \mathbf{v}^*)$	$-\nabla \cdot ((a_k' + b_k' \phi) \nabla v_i) - \partial_i ((a_k'' + b_k'' \phi) \nabla \cdot \mathbf{v})$
$\delta_i \mathcal{L}_1$	0	0
$\delta_i \mathcal{L}_2$	0	0
$\delta_i \mathcal{L}_3$	$\frac{1}{4} \partial_j \phi^* S_{jj}^* + \frac{1}{4} v_i \nabla \cdot \mathbf{u}^*$	$R_{ij} \partial_j \phi + v_i \nabla \cdot \mathbf{u}$
$\delta_i \mathcal{L}_3'$	$\frac{1}{4} \partial_j \phi S_{jj}^* + \frac{1}{4} v_i \nabla \cdot \mathbf{u}$	$R_{ij} \partial_j \phi + v_i \nabla \cdot \mathbf{u}$
$\delta_i \mathcal{L}_4$	$\frac{1}{4} (\mathbf{v} \cdot \nabla (u_i^* + u_i) + \partial_j (\phi^* + \phi) S_{ji}) - \frac{1}{4} (v_j \partial_i (u_j^* + u_j) + S_{jj} \partial_i (\phi^* + \phi))$	$2(\mathbf{v} \cdot \nabla u_i + \partial_j \phi R_{ji} - v_j \partial_i u_j - R_{ik} \partial_k \phi)$
$\delta_i \mathcal{L}_5$	$-\delta_i \mathcal{L}_1 - \frac{1}{4} S_{kk} \partial_i \phi^* + \frac{1}{4} S_{kk} \partial_i \phi$	$-\delta_i \mathcal{L}_1$

\mathcal{L}_g も、式 (2.3.1) で与えられるもの (\mathcal{L}_{g0} とする) と中心からの寄与との和で表す：

$$\mathcal{L}_g = \mathcal{L}_{g0} + \frac{1}{2} g_1 (\mathbf{v}^{*2} - v^2)$$

変分の結果は

$$\begin{aligned} \delta_R \mathcal{L}_g &= \delta_R \mathcal{L}_{g0} \\ \delta_v \mathcal{L}_g &= i g_1 v_i^* \end{aligned}$$

となる。

変分を R_{ij}^* と v_i^* に関してとった結果を表 1, 2 と表 3 に与えている。他の Lagrangian 項についても同様に変分を取ることができる。その結果も合わせて表 1~3 に与えている。 $\delta_v \mathcal{L}_P$ は 0 である。

乱流の性質を平均流速の勾配によって与えることができる。この場合に重要な量は変形速度テンソルと渦度テンソルである。このうち渦度テンソルと \mathbf{R} の相互作用は \mathcal{L}_{L0} , \mathcal{L}_{40} , \mathcal{L}_{20} から現れる。他方、変形速度テンソルの相互作用は \mathcal{L}_{30} に現れる。 \mathcal{L}_{40} と \mathcal{L}_{50} には、この 2 種の他にトレース R_{kk} (乱流エネルギーを表すことが期待される) との相互作用が現れるのが特徴的である。

5. 運動方程式

運動方程式は、 R_{ij} を対称行列要素として表 2~3 の第 3 列の線形結合を 0 とおけば得られる。 \mathcal{L}_i の係数を a_i とする。粘性散逸項と圧力・外力項を取り入れないとき、 R_{ij} と v_i の運動方程式は

$$\begin{aligned} \dot{R}_{ij} + \mathbf{u} \cdot \nabla R_{ij} + \left(\frac{1}{4} - \alpha_1 \right) & \left(R_{ik} (\partial_k u_j - \partial_j u_k) + R_{jk} (\partial_k u_i - \partial_i u_k) \right) \\ & + \frac{1}{2} \alpha_2 \left(R_{ik} (\partial_k u_j + \partial_j u_k) + R_{jk} (\partial_k u_i + \partial_i u_k) \right) \\ - \nabla \cdot \left((a'_K + b'_K \phi) \nabla R_{ij} \right) - \frac{1}{2} & \left(\partial_i (a''_K + b''_K \phi) \partial_k R_{jk} + \partial_j (a''_K + b''_K \phi) \partial_k R_{ik} \right) \\ + g_0 \delta_{ij} R_{kk} + g_1 R_{ij} + \left(\frac{1}{2} - \alpha_2 \right) & R_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \\ + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \alpha_2 - \alpha_3 \right) & \left(v_i \partial_j \phi + v_j \partial_i \phi \right) + \frac{1}{2} \phi (\partial_i v_j + \partial_j v_i) \\ + \alpha_3 \left(\delta_{ij} R_{ik} \partial_l u_k - \frac{1}{2} R_{kk} \right. & \left. (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + 2 \delta_{ij} \mathbf{v} \cdot \nabla \phi \right) = -(\partial_i P_j + \partial_j P_i) \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_i + \mathbf{u} \cdot \nabla v_i = -2\alpha_3 \mathbf{v} \cdot \nabla u_i + \nabla \cdot \left((a'_K + b'_K \phi) \cdot \nabla v_i \right) + \partial_i \left((a''_K + b''_K \phi) \nabla \cdot \mathbf{v} \right) - g_1 v_i \\ - \phi \partial_k R_{ik} - \left(\frac{1}{2} + \alpha_2 \right) v_i \nabla \cdot \mathbf{u} - \left(\frac{1}{2} + \alpha_2 + 2\alpha_3 \right) R_{ik} \partial_k \phi + 2\alpha_3 (v_j \partial_i u_j + R_{kk} \partial_i \phi) \end{aligned} \quad (5.2)$$

となる。ここで $\alpha_1 \equiv a_1 + a_2$, $\alpha_2 \equiv a_3$, $\alpha_3 \equiv a_4 - a_5$ と置いた。 R に関する方程式（以後 R 方程式, 他も同様）の第 3 項以降は, 通常の応力方程式での粘性散逸と圧力・外力によるエネルギー移動の効果を総合したものに对应する。

特に, (5.1) の R 方程式で $i = j$ として和をとると, $\Sigma \equiv R_{ii} / 2$ として

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Sigma + \left(\frac{1}{4} - \alpha_1 \right) R_{ik} (\partial_k \mathbf{u}_i - \partial_i \mathbf{u}_k) + \frac{1}{2} \alpha_2 R_{ik} (\partial_k \mathbf{u}_i + \partial_i \mathbf{u}_k) + (3\mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1) \Sigma \\ - \frac{1}{2} \partial_i (a'_k + b'_k \phi) \partial_k R_{ik} + \left(\frac{1}{2} - \alpha_2 - \alpha_3 \right) \Sigma \nabla \cdot \mathbf{u} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \alpha_2 + 3\alpha_3 \right) \mathbf{v} \cdot \nabla \phi + \frac{1}{2} \phi \nabla \cdot \mathbf{v} \\ = \nabla \cdot \left((a'_k + b'_k \phi) \nabla \Sigma \right) - \nabla \cdot \mathbf{P} \end{aligned}$$

を得る。

これに相当する乱流の平均場方程式にはさまざまなものがあるが, Reynolds 応力方程式において, 流れの揺らぎの 3 次平均を含む項を 2 次の項で表す近似を採用したものに次のものがある:

$$\dot{K} + \mathbf{u} \cdot \nabla K + R_{ik} \partial_k \mathbf{u}_i = \nu \nabla^2 K - \varepsilon + C_T \partial_k \left(\frac{K}{\varepsilon} (R_{il} \partial_l R_{ik} + R_{kl} \partial_l K) \right)$$

K は Reynolds 応力を R_{ij} としたときの速度揺らぎエネルギー $R_{ii} / 2$, $\varepsilon \equiv \overline{v(\partial_i \tilde{u}_j)^2}$ は揺らぎエネルギーの平均散逸を表す。 C_T は定数である。右辺最後の項が揺らぎの 3 次平均の近似項である。 K 方程式を Σ 方程式と比較すると $1/4 - \alpha_1 = \alpha_2 / 2 = 1/2$, すなわち

$$\alpha_1 = -1/4, \alpha_2 = 1 \tag{5.3}$$

ならば, R_{ik} と速度勾配との相互作用が Reynolds 応力と速度勾配の相互作用に対応する。また

$$\alpha'_k = \nu$$

であれば, R_{ij} の拡散項が Reynolds 応力の拡散項に対応する。

Σ 方程式の, 有効粘性を含む残りの項が Reynolds 応力方程式での右辺第 2, 3 項に対応すると考える。すると, Σ 方程式における ϕv_i が K 方程式での $C_T (K/\varepsilon) (R_{il} \partial_l R_{ik} + R_{kl} \partial_l K)$ に対応することになる。 ϕ は渦粘性モデルにおける渦粘性 $\propto K^2/\varepsilon$ の役割を担うので, 結局 \mathbf{v} について

$$v_i \sim (R_{kl} \partial_l R_{ik} + R_{il} \partial_l K) / K$$

の対応関係が期待される。すなわち \mathbf{v} は Reynolds 応力の空間変化の指標と考えられる。

DEVМ は, 分子粘性に基づく Reynolds 流体方程式とは別物であるので, パラメータが上記の値をとらなければならない理由はない。しかし, 残念なことに DEVМ 内部ではこれまでに導入した結合定数は一意的には定まらない。本稿では, α_i や α'_k を自由なパラメータと

して扱う。

6. DEVM における一様乱流

6.1 DEVM における一様乱流解の性質

一様乱流とは、Reynolds 応力が場所に依存しない流れである。現実にもそのような流れが存在するかは疑わしいが、局所的に良い近似になることはあり得るし、理想化されているために数学的に取り扱いやすいのでモデル解析に用いられる。ここでは、我々のモデルがどのような一様乱流をもたらすかを調べる。

平均流と有効粘性が従う DEVM の式は以下のものであった (Takahashi 2017a, 2017b) :

$$\begin{aligned}\dot{u}_i + \mathbf{u} \cdot \nabla u_i &= \nu_0 \nabla \cdot (\phi \nabla u_i) - \frac{\xi_0^2}{2} \partial_i \phi^2 - \frac{\partial_i p}{\rho} + f_i \\ \dot{\phi} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) &= \lambda_0 \nabla^2 \phi - \frac{\nu_0}{2\xi_0} (\nabla \mathbf{u})^2 - c_V (\xi_0^2 - \phi^2)\end{aligned}$$

これと R 方程式, v 方程式を組み合わせる。 R_{ij} が時間のみに依存するとして空間微分の項を落とし, R 方程式を次のように書く :

$$\begin{aligned}\dot{R}_{ij} + \left(\frac{1}{4} - \alpha_1\right) &\left(R_{ik}(\partial_k u_j - \partial_j u_k) + R_{jk}(\partial_k u_i - \partial_i u_k)\right) + \left(\frac{1}{2} - \alpha_2\right) R_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \\ &+ g_0 \delta_{ij} R_{kk} + g_1 R_{ij} \\ &+ \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \alpha_2 - \alpha_3\right) \left(v_i \partial_j \phi + v_j \partial_i \phi\right) + \frac{1}{2} \phi (\partial_i v_j + \partial_j v_i) \\ &+ \frac{1}{2} \alpha_2 \left(R_{ik}(\partial_j u_k + \partial_k u_j) + R_{jk}(\partial_i u_k + \partial_k u_i)\right) + \alpha_3 \left(\delta_{ij} R_{kk} \partial_i u_k - \frac{1}{2} R_{kk}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)\right) \\ &+ 2\delta_{ij} \mathbf{v} \cdot \nabla \phi = -(\partial_i P_j + \partial_j P_i)\end{aligned}\tag{6.1.1}$$

R_{ij} に空間依存性が無いための十分条件としては, \mathbf{u} がたかだか座標の 1 次関数で, かつ i) ϕ が座標の 1 次関数で \mathbf{v} が定ベクトル, または ii) ϕ が定数で \mathbf{v} が座標の 1 次関数, の 2 つが考えられる。しかし, c_V が 0 でないときは ϕ 方程式の非線形性から ϕ が座標依存性を持ってないので i) は ϕ と \mathbf{v} は共に空間座標に関し一定を意味する。そこで, DEVM 方程式は

$$\dot{u}_i + \mathbf{u} \cdot \nabla u_i = -\frac{\partial_i p}{\rho} + f_i\tag{6.1.2}$$

$$\dot{\phi} = -\frac{\nu_0}{2\xi_0} (\nabla \mathbf{u})^2 - c_V (\xi_0^2 - \phi^2)\tag{6.1.3}$$

となり，拡張部分は

(i) ϕ と \mathbf{v} は共に空間的に一定の場合

$$\begin{aligned} \dot{R}_{ij} + \left(\frac{1}{4} - \alpha_1\right) \left(R_{ik}(\partial_k u_j - \partial_j u_k) + R_{jk}(\partial_k u_i - \partial_i u_k)\right) + g_0 \delta_{ij} R_{kk} + g_1 R_{ij} \\ + \frac{1}{2} \alpha_2 \left(R_{ik}(\partial_j u_k + \partial_k u_j) + R_{jk}(\partial_i u_k + \partial_k u_i)\right) \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

$$+ \alpha_3 \left(\delta_{ij} R_{ik} \partial_l u_k - \frac{1}{2} R_{kk}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)\right) = -(\partial_i P_j + \partial_j P_i)$$

$$\dot{v}_i + 2\alpha_3 (\mathbf{v} \cdot \nabla u_i - v_j \partial_i u_j) + g_1 v_i = 0 \quad (6.1.5)$$

(ii) ϕ が空間的に一定で \mathbf{v} が座標の 1 次関数の場合

$$\begin{aligned} \dot{R}_{ij} + \left(\frac{1}{4} - \alpha_1\right) \left(R_{ik}(\partial_k u_j - \partial_j u_k) + R_{jk}(\partial_k u_i - \partial_i u_k)\right) + g_0 \delta_{ij} R_{kk} + g_1 R_{ij} \\ + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \alpha_2 - \alpha_3\right) \frac{1}{2} \phi (\partial_i v_j + \partial_j v_i) + \frac{1}{2} \alpha_2 \left(R_{ik}(\partial_j u_k + \partial_k u_j) + R_{jk}(\partial_i u_k + \partial_k u_i)\right) \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

$$+ \alpha_3 \left(\delta_{ij} R_{ik} \partial_l u_k - \frac{1}{2} R_{kk}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)\right) = -(\partial_i P_j + \partial_j P_i)$$

$$\dot{v}_i + \mathbf{u} \cdot \nabla v_i + 2\alpha_3 (\mathbf{v} \cdot \nabla u_i - v_j \partial_i u_j) + g_1 v_i = 0 \quad (6.1.7)$$

となる。

まず \mathbf{u} と ϕ を決めよう。 \mathbf{u} の式は Reynolds 一様乱流のそれと同じであるから通常の議論が成り立つ。すなわち， \mathbf{u} を

$$u_i = w_{ij} x_j, \text{Tr} w = 0$$

とおく¹。これを (6.1.2) に代入すると

$$\dot{w}_{ij} x_j + w_{ik} w_{kj} x_j = -\frac{\partial_i p}{\rho} + f_i$$

これより，圧力勾配と外力の組み合わせが座標の 1 次関数という極めて特殊な状況でのみ一様乱流が可能なのがわかる。

外力が保存力と仮定すると右辺の回転は 0 である。したがって

$$0 = \varepsilon_{kim} \partial_m (\dot{w}_{ij} x_j + w_{il} w_{lj} x_j) = \varepsilon_{kij} (\dot{w}_{ij} + w_{il} w_{lj})$$

が全ての k について成り立つ。 w を対称成分と反対称成分に分け

$$w_{ij} = s_{ij} + a_{ij}$$

¹ このとき $\nabla^2 \mathbf{u} = 0$ なので，以下で求める解は粘性流体の解にもなっている。

これを上式に代入すると

$$\varepsilon_{kij}(\dot{a}_{ij} + a_{il}s_{lj} + s_{il}a_{lj}) = 0$$

ε_{kij} を掛けて k について和を取ると

$$\dot{a}_{ij} + a_{il}s_{lj} + s_{il}a_{lj} = 0$$

となる。直交変換で対称成分を対角化して

$$s_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} \quad (i \text{ について和を取らない})$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad (\text{非圧縮性})$$

とすると $\dot{a}_{ij} + (\lambda_i + \lambda_j)a_{ij} = 0$ によって a_{ij} が

$$a_{ij}(t) = a_{ij}(0) \exp\left(-\int_0^t (\lambda_i(t') + \lambda_j(t')) dt'\right)$$

のように表わされる。この a_{ij} をもとの Navier-Stokes 方程式に代入すると λ_i の方程式が得られる。 λ_i は実数で正のものがあれば必ず負のものもある。したがって、 a_{ij} は絶対値が増大するものがあれば必ず減少するものもある。

このとき

$$(\nabla \mathbf{u})^2 = w_{ij}^2 = s_{ij}^2 + a_{ij}^2$$

であるので、これを (6.1.3) に代入すると ϕ の時間についての 1 階微分方程式が定まる。こうして \mathbf{u} と ϕ が決まったので、次に i) と ii) の場合について \mathbf{v} と R_{ij} を決定する。ここで

$$\partial_j u_i - \partial_i u_j = 2a_{ij}$$

$$\partial_j u_i + \partial_i u_j = 2s_{ij}$$

の関係式を用いる。 $-2a_{ij}$ は平均渦度、 $2s_{ij}$ は平均変形速度である。

ϕ 方程式は

$$\dot{\phi} = c_v \phi^2 - c_v \xi_0^2 - \frac{v_0}{2\xi_0} (w_{ij}(t))^2 \quad (6.1.8)$$

の形をとるので数値的に解くことができる。

(i) の場合、 v 方程式は

$$\dot{v}_i + 4\alpha_3 a_{ij} v_j + g_1 v_i = 0$$

である。 $\{a_{ij}\}$ の固有値が 0 および $\pm i\sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2}$ であることを使えば上の方程式は簡単に解ける。Takahashi (2018) では $g_1 > 0$ であった。このとき、 $t \rightarrow \infty$ で $|v_i|$ は一般に指数関数的に減少し $\mathbf{v} = 0$ に近づく。また、 R_{ij} が対称であることから

$$\begin{aligned} \dot{R}_{ij} + \left(\frac{1}{2} - 2\alpha_1\right)(R_{ik}a_{jk} + R_{jk}a_{ik}) + \alpha_2(R_{ik}s_{kj} + R_{jk}s_{ki}) + \alpha_3(\delta_{ij}s_{kl}R_{lk} - s_{ij}R_{kk}) \\ + g_0\delta_{ij}R_{kk} + g_1R_{ij} = -(\partial_i P_j + \partial_j P_i) \end{aligned}$$

を得る。

(ii) の場合

$$v_i = \tilde{w}_{ij}x_j$$

とおいて (6.1.7) と (6.1.6) に代入して

$$\dot{\tilde{w}}_{ij} + w_{ij}\tilde{w}_{ii} + 4\alpha_3a_{ik}\tilde{w}_{kj} + g_1\tilde{w}_{ij} = 0 \quad (6.1.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{R}_{ij} + \left(\frac{1}{2} - 2\alpha_1\right)(a_{jk}R_{ik} + a_{ik}R_{jk}) + \alpha_2(s_{kj}R_{ik} + s_{ki}R_{jk}) + \alpha_3(\delta_{ij}s_{kl}R_{lk} - s_{ij}R_{kk}) + g_0\delta_{ij}R_{kk} + g_1R_{ij} \\ = -\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3\right)\phi(\tilde{w}_{ij} + \tilde{w}_{ji}) - (\partial_i P_j + \partial_j P_i) \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

これらは \tilde{w} と R_{ij} の線形微分方程式なので原則として容易に解くことができる。式 (6.1.9) より, g_1 が正で十分大きければ $w_{ij}(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ でやはり $v(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ である。

6.2 ϕ と v が共に空間的に一定の場合の特殊な解

ϕ と v は共に空間的に一定の場合 -6.1 の (i) - の特殊な解を求めてみる。そのためにまず w と F に対する条件を決定する。圧力勾配とポテンシャル外力の寄与は

$$-\frac{\partial_i p}{\rho} + f_i \equiv F_{ij}x_j$$

の形に書かれる。このとき

$$\dot{w}_{ij}x_j + w_{ik}w_{kj}x_j = F_{ij}x_j$$

より

$$\dot{w}_{ij} + w_{ik}w_{kj} = F_{ij} \quad (6.2.1)$$

である。特殊な場合として, f がポテンシャル力であれば $\nabla \times (F \cdot \mathbf{x})|_i = \varepsilon_{ijk}F_{jk} = 0$ なので F_{ij} は対称となる。便宜上, F_{ij} を対称成分と反対称成分に分けておく:

$$F_{ij} = F_{ij}^{(s)} + F_{ij}^{(a)}$$

$$F_{ij}^{(s)} = \frac{1}{2}(F_{ij} + F_{ji}), F_{ij}^{(a)} = \frac{1}{2}(F_{ij} - F_{ji})$$

行列 \mathbf{w} は対称成分が対角化されているとしたので

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \xi & \eta \\ -\xi & \lambda_2 & \zeta \\ -\eta & -\zeta & \lambda_3 \end{pmatrix}, \mathbf{s} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & \xi & \eta \\ -\xi & 0 & \zeta \\ -\eta & -\zeta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 - \xi^2 - \eta^2 & -\eta\xi & \xi\zeta \\ -\eta\xi & \lambda_2^2 - \xi^2 - \zeta^2 & -\xi\eta \\ \xi\zeta & -\xi\eta & \lambda_3^2 - \eta^2 - \zeta^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\xi\lambda_3 & -\eta\lambda_2 \\ \xi\lambda_3 & 0 & -\zeta\lambda_1 \\ \eta\lambda_2 & \zeta\lambda_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.2.2)$$

$$w_{ij}^2 = s_{ij}^2 + a_{ij}^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

と書ける。ここで $\text{Tr}\mathbf{w} = 0$, すなわち $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ を使った。(6.2.1) の対称成分を比較して

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 + \lambda_1^2 - \xi^2 - \eta^2 &= F_{11}^{(s)} \\ \dot{\lambda}_2 + \lambda_2^2 - \xi^2 - \zeta^2 &= F_{22}^{(s)} \\ \dot{\lambda}_3 + \lambda_3^2 - \eta^2 - \zeta^2 &= F_{33}^{(s)} \\ \eta\dot{\zeta} &= -F_{12}^{(s)}, \xi\dot{\zeta} = F_{13}^{(s)}, \xi\dot{\eta} = -F_{23}^{(s)} \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

同様に反対称成分を比較して

$$\begin{aligned} \dot{\xi} - \lambda_3\xi &= F_{12}^{(a)} \\ \dot{\eta} - \lambda_2\eta &= F_{13}^{(a)} \\ \dot{\zeta} - \lambda_1\zeta &= F_{23}^{(a)} \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

でなければならない。

外力が保存力でなく F_{ij} が反対称成分を持つときは、 \mathbf{F} を時間に依存しない定数とすると、全ての量が時間に依存しない定常解が許される。“一様乱流”は通常そのような場合を想定しており、そのときの一様乱流の性質はよく調べられている (Davidson 2015)。ここでは時間依存性に興味があり、まず \mathbf{F} が反対称成分を有する定数とした場合を調べ、次に外力が保存力、すなわち \mathbf{F} が対称の場合について考察する。

6.2.1 F が反対称成分を持つ定数の場合

(6.2.1) と (6.2.2) から w が定数となる解が存在し

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 - \xi^2 - \eta^2 &= F_{11}^{(s)} \\ \lambda_2^2 - \xi^2 - \zeta^2 &= F_{22}^{(s)} \\ \lambda_3^2 - \eta^2 - \zeta^2 &= F_{33}^{(s)} \\ -\lambda_3\xi &= F_{12}^{(a)}, \quad -\lambda_2\eta = F_{13}^{(a)}, \quad -\lambda_1\zeta = F_{23}^{(a)} \end{aligned}$$

を満たす。ただし、 $\text{Tr}w=0$ より

$$\frac{F_{12}^{(a)}}{\xi} + \frac{F_{13}^{(a)}}{\eta} + \frac{F_{23}^{(a)}}{\zeta} = 0$$

の関係がある。これらの λ_i と ξ, η, ζ を用いて、平均流速は $u_i = w_{ij}x_j$ 、すなわち

$$\begin{aligned} u_x &= \lambda_1 x + \xi y + \eta z \\ u_y &= -\xi x + \lambda_2 y + \zeta z \\ u_z &= -\eta x - \zeta y + \lambda_3 z \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

と表わされる。

3次元流で簡単な場合、 $\eta = \xi = 0$ 、を考えよう。座標を時間とともに移動する流体要素の位置とする。すると、各時刻における流体要素の速度 u も時間の関数となる。そこで、時間で両辺を微分して

$$\begin{aligned} \dot{u}_x &= \lambda_1 u_x + \xi u_y \\ \dot{u}_y &= -\xi u_x + \lambda_2 u_y \\ \dot{u}_z &= \lambda_3 u_z \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

となる。 $u_z \sim e^{\lambda_3 t}$ である。 $u_x, u_y \sim e^{\gamma t}$ とおくと

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\lambda_1 + \lambda_2 \pm \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 4\xi^2} \right)$$

となる。 $|\lambda_1 - \lambda_2|$ と $2|\xi|$ の大小関係によって、

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 4\xi^2 > 0 \quad \text{単純減衰} \cdot \text{単純増幅},$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 4\xi^2 = 0 \quad \text{臨界減衰} \cdot \text{臨界増幅},$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 4\xi^2 < 0 \quad \text{減衰振動} \cdot \text{増幅振動}$$

が起きる。例を図 1 に示す。

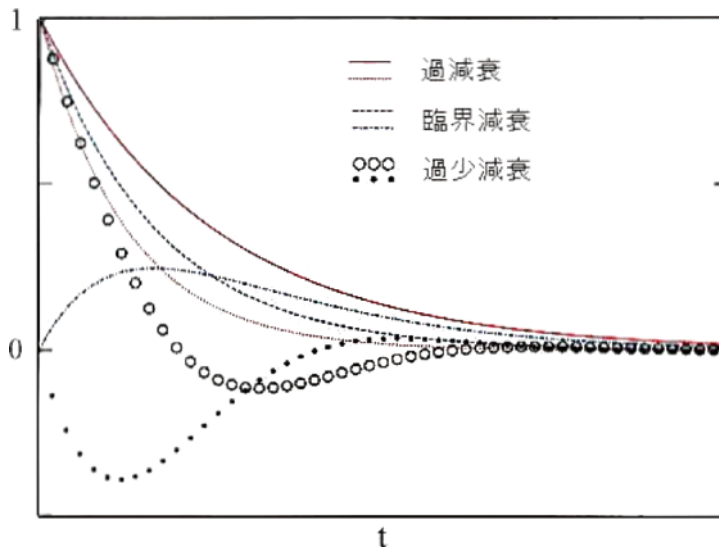


図 1. $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \text{Re} \gamma < 0$ のときの解の振舞い。 $\xi = 0$ (過減衰), $3/2$ (臨界減衰), 2 (過少減衰) の場合の独立解を描いている。臨界運動のときの独立解は e^{t^2} と te^{t^2} であることに注意。

w が定数なので、時間に依存しない正の ϕ が存在する：

$$\phi = \sqrt{\xi_0^2 + (g_1 / c_V)(w_{ij})^2} \equiv \phi_0$$

これは平均速度が 0 のとき静止流体の値 ξ_0 となる自然な解である。時間に依存する解は

$$\phi = -\phi_0 \tanh(c_V \phi_0 t) \text{ または } \phi = -\phi_0 \coth(c_V \phi_0 t) \text{ で、 } t \rightarrow \infty \text{ で負になるので不適である。}$$

6.2.2 F が定数対称行列の場合

対称成分については (6.2.3) が成り立つ。簡単な 2 次元流

$$\mathbf{F}^{(a)} = F_{33}^{(s)} = 0, F_{11}^{(s)} = F_{22}^{(s)}, \eta = \zeta = \lambda_3 = 0$$

のときは、 $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$ とおいて

$$u_x = \lambda x - \xi y, \quad u_y = \xi x - \lambda y$$

となる。流れ関数を $\psi = \lambda xy - \xi(x^2 + y^2)/2$ とおけば

$$u_i = \varepsilon_{ij} \partial_j \psi$$

である。 (x, y) を流体要素の座標とすると $u_x = \dot{x}, u_y = \dot{y}$ より

$$\ddot{u}_i = (\lambda^2 - \xi^2) u_i$$

となる。図 2 に示すように、流線は λ と ξ の大小関係によって、双曲線、直線、楕円となる。

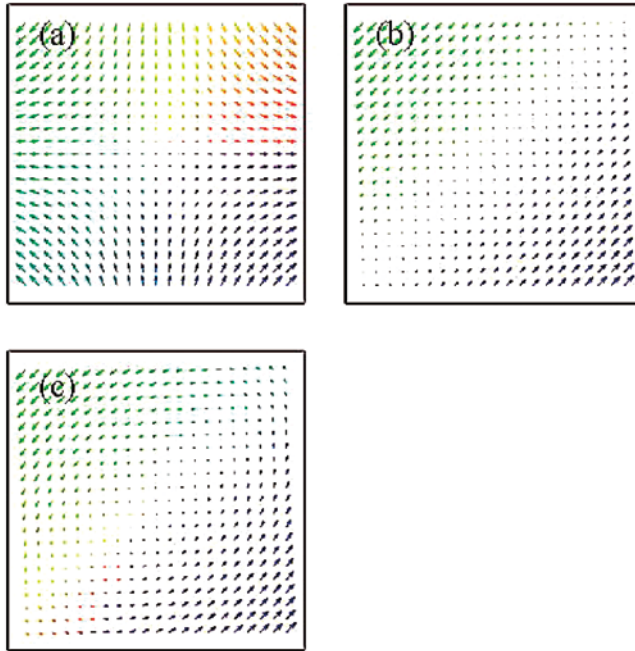


図 2. 2次元流の流れの種類。(a) 双曲線流: $|\lambda| > |\xi|$, (b) 直線流: $|\lambda| = |\xi|$, (c) 楕円流: $|\lambda| < |\xi|$ 。

6.2.3 F_{ij} が対角で w が時間に依存する場合

最も単純な、 F_{11} と F_{22} を除いて $F_{ij}=0$ の場合を考える。このとき、 ξ, η, ζ の少なくともどれか 2 つが 0 となる。ここでは $\eta = \zeta = 0$ とする。すると

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1 &= -\lambda_1^2 + \xi^2 + F_{11}^{(s)} \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_2^2 + \xi^2 + F_{22}^{(s)} \\ \dot{\lambda}_3 &= -\lambda_3^2 \\ \dot{\xi} &= \lambda_3 \xi\end{aligned}$$

λ_3 と ξ は直ちに解くことができる。 $\lambda_3 = 0$ は解である。このとき ξ は定数で

$$\lambda_1^2 = \xi^2 + F_{11}^{(s)}, \quad \lambda_2^2 = \xi^2 + F_{22}^{(s)}$$

という定常解がある ($F_{11}^{(s)}$ と $F_{22}^{(s)}$ が定常として)。

$\lambda_3 \neq 0$ の解は (特異点を $t=0$ にとって)

$$\lambda_3 = \frac{1}{t}, \quad \xi = ct$$

である。 c は定数である。 $c \neq 0$ は時間に比例して増大する速度成分があることを意味する。この場合、流体のエネルギー密度は時間の 2 乗に比例して急速に増大する。外部に強力なエネルギーの供給源があるときに可能な解である。ここではそのようなエネルギー源はないとして $c=0$ とする。したがって

$$\xi = 0$$

すなわち非対角成分は全て 0 である。

λ_1 と λ_2 は $F_{11}^{(s)}$ と $F_{22}^{(s)}$ に依存しすぐには決まらない。ただし、 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ の条件より

$$\lambda_1 = \frac{a_1}{t} + g(t), \quad \lambda_2 = \frac{a_2}{t} - g(t) \quad (6.2.7)$$

$$a_1 + a_2 = -1$$

でなければならない。よって

$$\dot{g} - \frac{a_1}{t^2} = -\left(g + \frac{a_1}{t}\right)^2 + F_{11}^{(s)}$$

$$\dot{g} + \frac{a_2}{t^2} = \left(g - \frac{a_2}{t}\right)^2 - F_{22}^{(s)}$$

この 2 つが矛盾しないためには $F_{11}^{(s)}$ あるいは $F_{22}^{(s)}$ が非ゼロでなければならない。

地球上の環境あるいは実験室内では $F_{11}^{(s)}$ と $F_{22}^{(s)}$ が共に $O(t^2)$ 以上の発散をすることは稀だろう。そうした発散が無いという条件下では、解は

$$g(t) \sim o(t), \quad t \rightarrow \infty$$

でなければならない。すると

$$F_{11}^{(s)} = \dot{g} - \frac{a_1}{t^2} + \left(g + \frac{a_1}{t}\right)^2, \quad F_{22}^{(s)} = -\dot{g} - \frac{a_2}{t^2} + \left(g - \frac{a_2}{t}\right)^2$$

$t \rightarrow \infty$ で乱流系が定常的になる、すなわちあらゆる平均が定数に近づくとして、最も単純に g を定数とすると

$$F_{11}^{(s)} = \frac{a_1^2 - a_1}{t^2} + \frac{2fa_1}{t} + g^2, \quad F_{22}^{(s)} = \frac{a_2^2 - a_2}{t^2} - \frac{2fa_2}{t} + g^2$$

となる。この結果は (6.1.2) すなわち Euler 方程式を解いて得られたもので、モデルに依存しない。

ϕ については

$$\dot{\phi} = c_V \phi^2 - c_V \xi_0^2 - g_1 w_{ij}^2$$

$$w_{ij}^2(t) = \left(\frac{a_1}{t} + g \right)^2 + \left(\frac{a_2}{t} - g \right)^2 + \frac{1}{t^2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + 1}{t^2} + 2 \frac{a_1 - a_2}{t} g + 2g^2$$

を解けばよい。 ϕ_0 を定数として

$$\phi = \frac{\alpha}{t} + \phi_0$$

とおくと

$$-\frac{\alpha}{t^2} = c_V \left(\phi_0^2 + \frac{2\alpha}{t} \phi_0 + \frac{\alpha^2}{t^2} \right) - c_V \xi_0^2 - g_1 \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + 1}{t^2} + 2 \frac{a_1 - a_2}{t} g + 2g^2 \right)$$

となるので、 t のべき乗の各項を比較して

$$-\alpha = c_V \alpha^2 - g_1 (a_1^2 + a_2^2 + 1)$$

$$2c_V \alpha \phi_0 - 2g_1 g (a_1 - a_2) = 0$$

$$c_V \phi_0^2 - c_V \xi_0^2 - 2g_1 g^2 = 0$$

が成り立つ。これより

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 + 4g_1 (a_1^2 + a_2^2 + 1)} - 1}{2c_V}$$

$$\phi_0 = \xi_0 \left(1 - \frac{2c_V \alpha^2}{g_1 (a_1 - a_2)^2} \right)^{-1/2}$$

$$g = \text{sgn}(a_1 - a_2) \frac{c_V \alpha \xi_0}{\left(g_1^2 (a_1 - a_2)^2 - 2g_1 c_V \alpha^2 \right)^{1/2}}$$

を得る。

a_{ij} は全ての成分が 0 なので \mathbf{v} は時間依存性を持たない。 R 方程式は成分で表すと

$$\begin{aligned}
 \dot{R}_{xx} + (2\alpha_2\lambda_1 + g_1)R_{xx} + g_0\Sigma + \alpha_3((\lambda_2 - \lambda_1)R_{yy} + (\lambda_3 - \lambda_1)R_{zz}) &= -2\partial_x P_x \\
 \dot{R}_{yy} + (2\alpha_2\lambda_2 + g_1)R_{yy} + g_0\Sigma + \alpha_3((\lambda_1 - \lambda_2)R_{xx} + (\lambda_3 - \lambda_2)R_{zz}) &= -2\partial_y P_y \\
 \dot{R}_{zz} + (2\alpha_2\lambda_3 + g_1)R_{zz} + g_0\Sigma + \alpha_3((\lambda_1 - \lambda_3)R_{xx} + (\lambda_2 - \lambda_3)R_{yy}) &= -2\partial_z P_z \\
 \dot{R}_{xy} + (\alpha_2(\lambda_1 + \lambda_2) + g_1)R_{xy} &= -(\partial_x P_y + \partial_y P_x) \\
 \dot{R}_{xz} + (\alpha_2(\lambda_1 + \lambda_3) + g_1)R_{xz} &= -(\partial_x P_z + \partial P_x) \\
 \dot{R}_{yz} + (\alpha_2(\lambda_2 + \lambda_3) + g_1)R_{yz} &= -(\partial_y P_z + \partial_z P_y)
 \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

ただし

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{a_1 - a_2}{t} + 2g, \quad \lambda_1 - \lambda_3 = \frac{a_1 - 1}{t} + g, \quad \lambda_2 - \lambda_3 = \frac{a_2 - 1}{t} - g$$

である。 $i \neq j$ に対し $\partial_i P_j = 0$ とすると非対角成分はすぐに求まる：

$$\begin{aligned}
 R_{xy} &\propto t^{\alpha_2} e^{-g_1 t} \\
 R_{xz} &\propto t^{\alpha_2 a_2} e^{-(\alpha_2 g + g_1) t} \\
 R_{yz} &\propto t^{\alpha_2 a_1} e^{(\alpha_2 g - g_1) t}
 \end{aligned} \tag{6.2.9}$$

外力は定数に向かって近づくのでいずれ粘性力と釣り合うはずで、 R_{ij} を Reynolds 応力とみなしたとき、それが時間とともにどこまでも増大することはあり得ない。例えば、

$$\alpha_2 > 0, \quad g_1 < 0, \quad g_1 < \alpha_2 g < -g_1 \tag{6.2.10}$$

のときは R_{xy}, R_{yz}, R_{xz} は指数関数的に増大する不安定解のみが存在する。このような不安定性は非線形項を導入することで最終的に取り除かれるべきものである。 $g_1 > 0, -g_1 < \alpha_2 g < g_1$ であれば線形レベルで安定解となる。乱流は系の不安定性に由来するもので、乱流モデルは線形レベルで成長するモードを含んでいなければならない。条件 (6.2.10) はそのための十分条件である。

$g_1 = 0$ では、成分ごとに冪関数的増大または減衰と指数関数的増大・減少が現れる。

6.2.3.1 Reynolds 応力が定数となる条件

対角成分については、外力が定数という条件のもとで定数となる解が存在する条件を探してみよう。

$$\partial_i P_i = -q_i \quad (\text{左辺は } i \text{ について和をとらない})$$

として (6.2.8) は、(以後 $a \equiv a_1, b \equiv a_2$ と書く)

$$\begin{aligned}
 \dot{R}_{xx} + 2\alpha_2 \left(\frac{a}{t} + g + \frac{g_0 + g_1}{2\alpha_2} \right) R_{xx} + \alpha_3 \left(\left(\frac{b-a}{t} - 2g + \frac{g_0}{\alpha_3} \right) R_{yy} + \left(\frac{1-a}{t} - g + \frac{g_0}{\alpha_3} \right) R_{zz} \right) &= 2q_x \\
 \dot{R}_{yy} + 2\alpha_2 \left(\frac{b}{t} - g + \frac{g_0 + g_1}{2\alpha_2} \right) R_{yy} + \alpha_3 \left(\left(\frac{a-b}{t} + 2g + \frac{g_0}{\alpha_3} \right) R_{xx} + \left(\frac{1-b}{t} + g + \frac{g_0}{\alpha_3} \right) R_{zz} \right) &= 2q_y \\
 \dot{R}_{zz} + 2\alpha_2 \left(\frac{1}{t} + \frac{g_0 + g_1}{2\alpha_2} \right) R_{zz} + \alpha_3 \left(\left(\frac{a-1}{t} + g + \frac{g_0}{\alpha_3} \right) R_{xx} + \left(\frac{b-1}{t} - g + \frac{g_0}{\alpha_3} \right) R_{yy} \right) &= 2q_z
 \end{aligned}
 \tag{6.2.11}$$

となるが、ここで $\dot{R}_{ii} = 0$ (i について和をとらない) を仮定するのである。 $1/t$ の係数が 0 となる条件は

$$\begin{aligned}
 2\alpha_2 a R_{xx} - \alpha_3 (a-b) R_{yy} - \alpha_3 (a-1) R_{zz} &= 0 \\
 \alpha_3 (a-b) R_{xx} + 2\alpha_2 b R_{yy} - \alpha_3 (b-1) R_{zz} &= 0 \\
 \alpha_3 (a-1) R_{xx} + \alpha_3 (b-1) R_{yy} + 2\alpha_2 R_{zz} &= 0
 \end{aligned}$$

である。系数行列の行列式を 0 とおくことにより

$$\begin{aligned}
 a = 0, \quad b = -1 \\
 (1) \quad \alpha_3 R_{xx} = 2(\alpha_2 - \alpha_3) R_{zz}, \quad R_{yy} = R_{zz}
 \end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned}
 a = -1, \quad b = 0 \\
 (2) \quad \alpha_3 R_{yy} = 2(\alpha_2 - \alpha_3) R_{zz}, \quad R_{xx} = R_{zz}
 \end{aligned}$$

または

$$(3) \quad \alpha_2 / \alpha_3 = \pm 3/2$$

を得る。

$R_{ii} > 0$ とすると、第 1 または第 2 の条件下では $\alpha_2 / \alpha_3 > 1$ である。

第 3 の条件下では $a (= -1 - b)$ は任意である。もしも Reynolds 平均モデルとの対応から得た条件 $\alpha_2 = 1$ を課すならば、それと最後の条件から

$$(\alpha_2, \alpha_3) = (1, \pm 2/3)
 \tag{6.2.12}$$

となる。これらを A, B で表す。また、第 3 の条件下では R_{ii} は

$$\frac{R_{yy}}{R_{xx}} = -\frac{2(\alpha_2 / \alpha_3)(a-b) + (a-1)(b-1)}{b^2 + 7b + 1}$$

$$\frac{R_{zz}}{R_{xx}} = \frac{(a-b)(b-1) - (9/2)(\alpha_3 / \alpha_2)(a-1)b}{b^2 + 7b + 1}$$

の関係にある。A 点では

$$R_{xx} = R_{yy} = R_{zz}$$

である。 t^0 の定数項は外力との関係で決まる。

6.2.3.2 Reynolds 応力が時間に依存する解

時間に依存する解は、(6.2.11) において \dot{R}_{ii} を残すことで得られる。 R_{ii} に任意の時間依存性を与え、それによって q_i を定義すれば任意の解が得られる。ここでは、定常乱流をつくるときに外力は一定とした場合を考えてみる。一般的には

$$R_{ii} = \frac{c_i}{t^s} + d_i \quad (6.2.13)$$

を仮定するのが妥当であるがここではべき指数を $s=1$ としてみよう。方程式 (6.2.11) は

$$\begin{aligned} & -\frac{c_x}{t^2} + 2\alpha_2 \left(\frac{ac_x}{t^2} + \frac{ad_x + g_{x1}c_x}{t} + g_{x1}d_x \right) \\ & -\alpha_3 \left(\frac{(a-b)c_y + (a-1)c_z}{t^2} + \frac{(a-b)d_y + 2g_{x2}c_y + (a-1)d_z + g_{x3}c_z}{t} + 2g_{x2}d_y + g_{x3}d_z \right) = 2q_x \\ & -\frac{c_y}{t^2} + 2\alpha_2 \left(\frac{bc_y}{t^2} + \frac{bd_y - g_{y1}c_y}{t} - g_{y1}d_y \right) \\ & +\alpha_3 \left(\frac{(a-b)c_x - (b-1)c_z}{t^2} + \frac{(a-b)d_x + 2g_{y2}c_x - (b-1)d_z + g_{y3}c_z}{t} + 2g_{y2}d_x + g_{y3}d_z \right) = 2q_y \\ & -\frac{c_z}{t^2} + 2\alpha_2 \left(\frac{c_z}{t^2} + \frac{d_z}{t} + g_{z1}d_z \right) \\ & +\alpha_3 \left(\frac{(a-1)c_x + (b-1)c_y}{t^2} + \frac{(a-1)d_x + g_{z2}c_x + (b-1)d_y - g_{z3}c_y}{t} + g_{z2}d_x - g_{z3}d_y \right) = 2q_z \end{aligned}$$

となる。ここで

$$g_{x1} = g + \frac{g_0 + g_1}{2\alpha_2}, \quad g_{x2} = g - \frac{g_0}{2\alpha_3}, \quad g_{x3} = g - \frac{g_0}{\alpha_3}$$

$$g_{y1} = g - \frac{g_0 + g_1}{2\alpha_2}, \quad g_{y2} = g + \frac{g_0}{2\alpha_3}, \quad g_{y3} = g + \frac{g_0}{\alpha_3}$$

$$g_{z1} = \frac{g_0 + g_1}{2\alpha_2}, \quad g_{z2} = g + \frac{g_0}{\alpha_3}, \quad g_{z3} = g - \frac{g_0}{\alpha_3}$$

と定義した。 t の各べき項を比較して

$$(-1 + 2\alpha_2 a)c_x - \alpha_3((a-b)c_y + (a-1)c_z) = 0$$

$$2\alpha_2(ad_x + g_{x1}c_x) - \alpha_3((a-b)d_y + 2g_{x2}c_y + (a-1)d_z + g_{x3}c_z) = 0 \quad (6.2.14)$$

$$2\alpha_2 g_{1d_x} - \alpha_3(2g_{x2}d_y + g_{x3}d_z) = 2q_x$$

$$(-1 + 2\alpha_2 b)c_y + \alpha_3((a-b)c_x - (b-1)c_z) = 0$$

$$2\alpha_2(bd_y - g_{y1}c_y) + \alpha_3((a-b)d_x + 2g_{y2}c_x - (b-1)d_z + g_{y3}c_z) = 0 \quad (6.2.15)$$

$$-2\alpha_2 g_{y1}d_y + \alpha_3(2g_{y2}d_x + g_{y3}d_z) = 2q_y$$

$$(-1 + 2\alpha_2)c_z + \alpha_3((a-1)c_x + (b-1)c_y) = 0$$

$$2\alpha_2 d_z + \alpha_3((a-1)d_x + g_{z2}c_x + (b-1)d_y - g_{z3}c_y) = 0 \quad (6.2.16)$$

$$2\alpha_2 g_{z1}d_z + \alpha_3(g_{z2}d_x - g_{z3}d_y) = 2q_z$$

式 (6.2.14), (6.2.15), (6.2.16) の係数行列式を 0 とおいて

$$ab = \frac{1 - 4\alpha_2^2 + 6\alpha_3^2}{-4\alpha_2^2 + 6\alpha_3^2 + 2\alpha_2(4\alpha_2^2 - 9\alpha_3^2)} \quad (6.2.17)$$

の場合に c_i に対する解があることが分かる。より具体的には

$$\frac{c_y}{c_x} = \frac{(2\alpha_2 a - 1)(b - 1) + \alpha_3(a - 1)(b - a)}{(2\alpha_2 b - 1)(a - 1) + \alpha_3(b - 1)(a - b)}$$

$$\frac{c_z}{c_x} = \frac{2\alpha_2 a - 1}{\alpha_3(a - 1)} - \frac{c_y}{c_x}$$

である。

式 (6.2.17) は、 α_2 と α_3 が決まっていると ab が決まることを意味する。条件 (6.2.7) より $a + b = -1$ なので式 (6.2.17) によって a と b が決まる。残りの式によって、 d_i と q_i が c_i を使って表わされる。

(6.2.7) の条件は a と b の少なくとも 1 つは負であることを意味する。 a と b について実

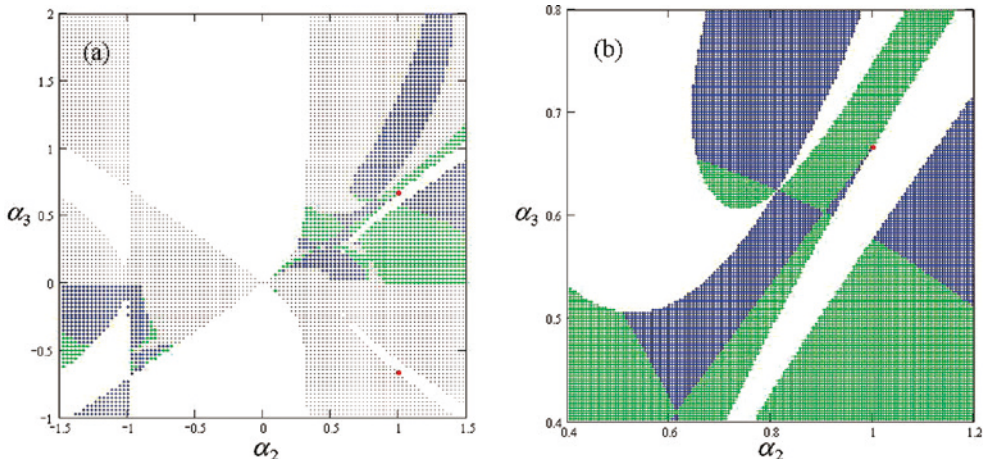


図3. 左図:条件 (6.2.7) と (6.2.18) を満たす (α_2, α_3) の領域を小さい (灰赤), および次に大きい (青と緑) 点で埋められた部分として示す。2 番目に大きい点は, 全ての i についてそれぞれ $gd_i \geq 0$ (青) と $gd_i \leq 0$ (緑) となる領域を示す。最も大きい2つの赤い点は $(1, 2/3)$ と $(1, -2/3)$ を表す。右図は, 左図の $gd_i \geq 0$ と $gd_i \leq 0$ となる領域の一部を拡大したもの。

数解があるためには, ab 面で直線 $a+b=-1$ と双曲線 (6.2.17) は交わらねばならず

$$ab \leq 1/4 \quad (6.2.18)$$

すなわち式 (6.2.17) の右辺が $1/4$ 以下でなければならない。

以後, 簡単のために特に断らなければ $g_0 = g_1 = 0$ の場合に話を限る。このとき条件(6.2.18) を満たす α_2 と α_3 の領域を図3に示す。青と緑の領域が物理的に意味がある部分

$$d_i = R_{ii}(t \rightarrow \infty) \geq 0, \quad i = x, y, z$$

で, 青は g が正, 緑が負の値に対応する。 g の符号が変わることは流れの向きが変わることと考えてよい。図中の大きい2点は以前に求めた $A = (1, 2/3)$ と $B = (1, -2/3)$ を表す。Bは, R_{ii} が上の必要条件を満たさない。Aについては, (6.2.17) の右辺がちょうど $1/4$ になり, 等号が成立する。Aは境界上の点になっている。Aからの僅かのずれが流れの向きを正反対にすることになる。

こころみに, A点での諸パラメータの値を求めてみると

$$a = b = -\frac{1}{2}$$

$$c_x = c_y = c_z, \quad d_x = d_y = d_z, \quad q_x = q_y = q_z = 0$$

である。体積力としての外力が0で, Reynolds 応力の対角成分のみが一様等方に変化しー

定値に近づくという状況である。揺らぎの原因が他に無ければ全ての i について $d_i=0$ である。

図 3 に表わされた、物理解が可能な領域が複雑に入り組んでいるようすは注目に値する。これは、 (α_2, α_3) のある領域部分では、値のわずかな変化で流れのようすが大きく変わることの意味する。特に、Reynolds 理論を反映した点 A は $g > 0$ と $g < 0$ の境界上にあり、式 (6.2.9) から分かるように g の符号変化は、 $|g_1|$ が十分小さいとき指数関数的時間依存性の様相に本質的の変化をもたらす可能性を内在させている。ここでは一様乱流の $1/t$ 型の振る舞いに話を限ったが、この事実はモデルパラメータの断熱変化に対しその流れが一あるいは流れ全体が一不安定であることを意味する。別の見方も可能である。乱流の影響を受けてモデルのパラメータが実質的に変化するとすれば、A 点を規定する有効値は流れの時々刻々の変化を受けて絶え間なく変化し、有効 A 点はこの図の中で細かく動き、青と緑の領域を行き来するだろう。これが一様乱流の特質である。

もう一つ興味深いことがある。ここでは例示しないが、 g_0 と g_1 の値を変化させても図 3(b) の物理領域のパターンに本質的な変化は生じない。A 点が境界線上にあるという事実も変わらない。これは、A 点近辺での現象を見る限り我々のモデルが g_0 と g_1 の変化に対し安定であることを示す。一様乱流を $g_0=g_1=0$ のモデルで記述するのは意味のあることなのである。

A 点以外の (α_2, α_3) として C: (0.9, 2/3) と D: (1.2, 2/3) を選びそこでのパラメータ値を求めると

$$C: \frac{c_y}{c_x} = 3.96, \quad \frac{c_z}{c_x} = -2.73, \quad \frac{\mathbf{q}}{g^2 c_x} = (-0.284, 2.95, 0.567)$$

$$D: \frac{c_y}{c_x} = 0.679, \quad \frac{c_z}{c_x} = -38.8, \quad \frac{\mathbf{q}}{g^2 c_x} = (-16.4, 4.67, -2.09)$$

このとき、 c_x と c_y は同符号、 c_y と c_z が異符号なので、 $1/t$ 型の振舞いをするときの R_{xx} と R_{yy} の漸近値への近づき方は同じで、 R_{yy} と R_{zz} は逆である。外力 \mathbf{q} は有限である。全エネルギー密度が変わらないのであれば、これは予想されることである。Takaoka (1997) は、数値シミュレーションでこの結果を得ている。

6.2.4 F_{ij} が非対角要素を持つ場合

簡単な場合、 $F_{22} = F_{33} = F_{12} = F_{13} = 0 = \zeta$ を考える。6.2.2 での検討から \mathbf{w} が時間に反比例する項を有すると仮定するのは自然であろう。そこで

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{a_i}{t}, \quad (i=1,2,3), \quad a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ \xi &= \frac{e_1}{t}, \quad \eta = \frac{e_2}{t} \end{aligned} \tag{6.2.19}$$

すなわち、全てのテンソル成分が時間とともに 0 に近づくことを仮定して、これを (6.2.4) に代入する。すると

$$-\frac{e_1}{t^2} = \frac{a_3 e_1}{t^2}, \quad -\frac{e_2}{t^2} = \frac{a_2 e_2}{t^2}$$

これより

$$a_1 = 2, \quad a_2 = a_3 = -1 \quad (6.2.20)$$

F_{ij} については (6.2.3) より

$$F_{11} = \frac{-2 + 4 - e_1^2 - e_2^2}{t^2} = \frac{2 - e_1^2 - e_2^2}{t^2}$$

$$F_{22} = \frac{1 + 1 - e_1^2}{t^2} = \frac{2 - e_1^2}{t^2}$$

$$F_{33} = \frac{1 + 1 - e_2^2}{t^2} = \frac{2 - e_2^2}{t^2}$$

$$F_{23} = -\frac{e_1 e_2}{t^2}$$

なので $F_{22} = F_{33} = 0$ は

$$e_1^2 = e_2^2 = 2 \quad (6.2.21)$$

のときに実現する。

ϕ については

$$\dot{\phi} = c_V \phi^2 - c_V \xi_0^2 - g_1 w_{ij}^2, \quad w_{ij}^2(t) = \frac{14}{t^2}$$

を解く。 $t \rightarrow \infty$ で $w_{ij}^2(t) \rightarrow 0$ だからこの極限で $\phi \rightarrow \xi_0$ となるはずである。実際、

$$\phi(t) = \xi_0 + \frac{\phi_1}{t} + \frac{\phi_2}{t^2} + h(t)$$

とにおいて ϕ 方程式 (6.1.8) に代入すると

$$\dot{h} - \frac{\phi_1}{t^2} - \frac{2\phi_2}{t^3} = c_V \left[2\xi_0 \left(\frac{\phi_1}{t} + \frac{\phi_2}{t^2} \right) + \left(\frac{\phi_1}{t} + \frac{\phi_2}{t^2} \right)^2 + 2 \left(\xi_0 + \frac{\phi_1}{t} + \frac{\phi_2}{t^2} \right) h + h^2 \right] - \frac{14g_1}{t^2}$$

となるので

$$\phi_1 = 0, \quad 2c_V \xi_0 \phi_2 = 14g_1$$

のように係数を選べば

$$\dot{h} = \frac{2\phi_2}{t^3} + \frac{c_V\phi_2^2}{t^4} + 2c_V\left(\xi_0 + \frac{\phi_2}{t^2}\right)h + c_Vh^2$$

より $t \rightarrow \infty$ で $h \rightarrow O(1/t^3)$ である。 $t \sim 0$ では

$$\phi = \frac{\bar{\phi}_{-1}}{t} + \bar{\phi}_1 t + g(t)$$

とおくと ϕ 式は

$$-\frac{\bar{\phi}_{-1}}{t^2} + \bar{\phi}_1 + \dot{g} = c_V\left(\frac{\bar{\phi}_{-1}^2}{t^2} + 2\bar{\phi}_{-1}\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_1^2 t^2 + 2\left(\frac{\bar{\phi}_{-1}}{t} + \bar{\phi}_1 t\right)g + g^2\right) - c_V\xi_0^2 - \frac{14g_1}{t^2}$$

となるので

$$-\bar{\phi}_{-1} = c_V\bar{\phi}_{-1}^2 - 14g_1, \quad \bar{\phi}_1 = c_V\bar{\phi}_{-1}\bar{\phi}_1 - c_V\xi_0^2$$

のように $\bar{\phi}_{-1}$ と $\bar{\phi}_1$ を選べば

$$\dot{g} = c_V\left(\bar{\phi}_1^2 t^2 + 2\left(\frac{\bar{\phi}_{-1}}{t} + \bar{\phi}_1 t\right)g + g^2\right)$$

より, t が小さいときに $g = O(t^3)$ の解が存在することが分かる。

6.2.4.1 F_{ij} が非対角要素を持ち R_{ij} が定数となる条件

R 方程式 (6.1.1) は各成分について

$$\begin{aligned} \dot{R}_{xx} + (1 - 4\alpha_1)(\xi R_{xy} + \eta R_{xz}) + 2\alpha_2\lambda_1 R_{xx} + \alpha_3((\lambda_2 - \lambda_1)R_{yy} + (\lambda_3 - \lambda_1)R_{zz}) &= 2q_x \\ \dot{R}_{yy} + (1 - 4\alpha_1)(-\xi R_{yx} + \zeta R_{yz}) + 2\alpha_2\lambda_2 R_{yy} + \alpha_3((\lambda_1 - \lambda_2)R_{xx} + (\lambda_3 - \lambda_2)R_{zz}) &= 2q_y \\ \dot{R}_{zz} - (1 - 4\alpha_1)(\eta R_{zx} + \zeta R_{zy}) + 2\alpha_2\lambda_3 R_{zz} + \alpha_3((\lambda_1 - \lambda_3)R_{xx} + (\lambda_2 - \lambda_3)R_{yy}) &= 2q_z \\ \dot{R}_{xy} + \left(\frac{1}{2} - 2\alpha_1\right)(-\xi(R_{xx} - R_{yy}) + \zeta R_{xz} + \eta R_{yz}) + \alpha_2(\lambda_2 + \lambda_1)R_{xy} &= 2q_{xy} \\ \dot{R}_{xz} + \left(\frac{1}{2} - 2\alpha_1\right)(-\eta((R_{xx} - R_{zz}) - \zeta R_{xy} + \xi R_{yz}) + \alpha_2(\lambda_3 + \lambda_1)R_{xz} &= 2q_{xz} \\ \dot{R}_{yz} + \left(\frac{1}{2} - 2\alpha_1\right)(-\zeta(R_{yy} - R_{zz}) - \xi R_{xz} - \eta R_{xy}) + \alpha_2(\lambda_3 + \lambda_2)R_{yz} &= 2q_{yz} \end{aligned} \tag{6.2.22}$$

(ただし $\zeta = 0$) となる。 $q_i = q_{ij} = 0$, R_{ij} を定数と仮定すると

$$\begin{aligned}
 (1-4\alpha_1)(e_1 R_{xy} + e_2 R_{xz}) + 2\alpha_2 a_1 R_{xx} + \alpha_3((a_2 - a_1)R_{yy} + (a_3 - a_1)R_{zz}) &= 0 \\
 -(1-4\alpha_1)e_1 R_{xy} + 2\alpha_2 a_2 R_{yy} + \alpha_3((a_1 - a_2)R_{xx} + (a_3 - a_2)R_{zz}) &= 0 \\
 -(1-4\alpha_1)e_2 R_{xz} + 2\alpha_2 a_3 R_{zz} + \alpha_3((a_1 - a_3)R_{xx} + (a_2 - a_3)R_{yy}) &= 0 \\
 -\left(\frac{1}{2} - 2\alpha_1\right)(e_1(R_{xx} - R_{yy}) - e_2 R_{yz}) - \alpha_2 a_3 R_{xy} &= 0 \\
 -\left(\frac{1}{2} - 2\alpha_1\right)(e_2(R_{xx} - R_{zz}) - e_1 R_{yz}) - \alpha_2 a_2 R_{xz} &= 0 \\
 -\left(\frac{1}{2} - 2\alpha_1\right)(e_1 R_{xz} + e_2 R_{xy}) - \alpha_2 a_1 R_{yz} &= 0
 \end{aligned}$$

となる。2 番目と 3 番目の式から

$$\begin{aligned}
 R_{xy} &= \frac{1}{(1-4\alpha_1)e_1} (2\alpha_2 a_2 R_{yy} + \alpha_3((a_1 - a_2)R_{xx} + (a_3 - a_2)R_{zz})) \\
 R_{xz} &= \frac{1}{(1-4\alpha_1)e_2} (2\alpha_2 a_3 R_{zz} + \alpha_3((a_1 - a_3)R_{xx} + (a_2 - a_3)R_{yy}))
 \end{aligned}$$

これと 4 番目の式から R_{xy} を消去すると

$$-\left(\frac{1}{2} - 2\alpha_1\right)(e_1((R_{xx} - R_{yy})) - e_2 R_{yz}) = \frac{\alpha_2 a_3}{(1-4\alpha_1)e_1} (2\alpha_2 a_2 R_{yy} + \alpha_3((a_1 - a_2)R_{xx} + (a_3 - a_2)R_{zz}))$$

すなわち

$$\begin{aligned}
 e_2 R_{yz} &= e_1(R_{xx} - R_{yy}) + \frac{2\alpha_2 a_3}{(1-4\alpha_1)^2 e_1} (2\alpha_2 a_2 R_{yy} + \alpha_3((a_1 - a_2)R_{xx} + (a_3 - a_2)R_{zz})) \\
 &= \left(e_1 + \frac{2\alpha_2 \alpha_3 a_3 (a_1 - a_2)}{(1-4\alpha_1)^2 e_1} \right) R_{xx} + \left(-e_1 + \frac{4\alpha_2^2 a_2 a_3}{(1-4\alpha_1)^2 e_1} \right) R_{yy} + \frac{2\alpha_2 \alpha_3 a_3 (a_3 - a_2)}{(1-4\alpha_1)^2 e_1} R_{zz}
 \end{aligned}$$

1 番目と 5, 6 番目の式は

$$\begin{aligned}
 (\alpha_3(2a_1 - a_2 - a_3) + 2\alpha_2 a_1)R_{xx} + (\alpha_3(2a_2 - a_1 - a_3) + 2\alpha_2 a_2)R_{yy} \\
 + (\alpha_3(2a_3 - a_1 - a_2) + 2\alpha_2 a_3)R_{zz} &= 0 \\
 \left(e_2^2 - e_1^2 - \frac{2\alpha_2 \alpha_3 a_3 (a_1 - a_2)}{(1-4\alpha_1)^2} + \frac{2\alpha_2 \alpha_3 a_2 (a_1 - a_3)}{(1-4\alpha_1)^2} \right) R_{xx} \\
 + \left(e_1^2 - \frac{4\alpha_2^2 a_2 a_3}{(1-4\alpha_1)^2} + \frac{2\alpha_2 \alpha_3 a_2 (a_2 - a_3)}{(1-4\alpha_1)^2} \right) R_{yy} - \left(e_2^2 + \frac{2\alpha_2 \alpha_3 a_3 (a_3 - a_2)}{(1-4\alpha_1)^2} - \frac{4\alpha_2^2 a_2 a_3}{(1-4\alpha_1)^2} \right) R_{zz} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{e_1^2}{2\alpha_1} \frac{\alpha_3}{\alpha_2} (a_1 - a_3) + \frac{e_2^2}{2\alpha_1} \frac{\alpha_3}{\alpha_2} (a_1 - a_2) + e_1^2 + \frac{2\alpha_2\alpha_3\alpha_3(a_1 - a_2)}{(1 - 4\alpha_1)^2} \right) R_{xx} \\ & + \left(\frac{e_1^2}{2\alpha_1} \frac{\alpha_3}{\alpha_2} (a_2 - a_3) + \frac{e_2^2 a_2}{\alpha_1} - e_1^2 + \frac{4\alpha_2^2 a_2 \alpha_3}{(1 - 4\alpha_1)^2} \right) R_{yy} \\ & + \left(\frac{e_1^2 a_3}{\alpha_1} + \frac{e_2^2}{2\alpha_1} \frac{\alpha_3}{\alpha_2} (a_3 - a_2) + \frac{2\alpha_2\alpha_3\alpha_3(a_3 - a_2)}{(1 - 4\alpha_1)^2} \right) R_{zz} = 0 \end{aligned}$$

となる。 $a_1 = 2, a_2 = a_3 = -1$ (6.2.20), $e_1^2 = e_2^2 = 2$ (6.2.21) であるから, これらは

$$\begin{aligned} & (3\alpha_3 + 2\alpha_2)(2R_{xx} - R_{yy} - R_{zz}) = 0 \\ & \left(1 - \frac{2\alpha_2^2}{(1 - 4\alpha_1)^2} \right) (R_{yy} - R_{zz}) = 0 \\ & \left(-6 \frac{\alpha_3}{\alpha_2} + 2 - \frac{6\alpha_2\alpha_3}{(1 - 4\alpha_1)^2} \right) R_{xx} + \left(-3 + \frac{4\alpha_2^2}{(1 - 4\alpha_1)^2} \right) R_{yy} - R_{zz} = 0 \end{aligned}$$

これに解が存在するためには

$$\begin{aligned} & 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ & 1 - \frac{2\alpha_2^2}{(1 - 4\alpha_1)^2} = 0 \\ & \frac{2\alpha_2^2 - 3\alpha_2\alpha_3}{(1 - 4\alpha_1)^2} = 1 + 3 \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \end{aligned}$$

のいずれかが成り立つ必要がある。1 番目と 3 番目の条件は, Reynolds 理論を反映する条件 $(\alpha_2, \alpha_3) = A$ 点 から大きく外れる (B 点はこれを満たすが他の物理条件から除外される)。

2 番目の条件は $(1 - 4\alpha_1)^2 = 2\alpha_2^2$ となる。Reynolds 理論との対応条件 (5.3) を思い出すとこれは左辺が 4, 右辺が 2 で, やはり等式は成立しない。Reynolds 理論と我々のモデルは単純には対応しないのである。ただし, 第 5 節で述べたように, 我々のモデルパラメータが Reynolds 理論を反映させなければならないという先験的理由は存在しない。

対角成分 R_{ii} は等方的で

$$R_{xx} = R_{yy} = R_{zz}$$

となる。Reynolds 応力が定数というのは非常に特殊なモデルパラメータのもとで実現する

解ということになるが、その近くのパラメータ値では Reynolds 応力が長寿命になることが考えられる。

6.2.4.2 F_{ij} が非対角要素を持ち Reynolds 応力に時間依存性がある解

一様乱流を模した風洞内気流では圧力勾配がある。一様乱流が定常な場合として応力方程式の外力項を非ゼロの定数と仮定するのは自然であろう。そこで 6.2.3.2 と同様に (6.2.22) で q_i と q_{ij} を定数とし

$$\begin{aligned} R_{ii} &= \frac{c_i}{t} + d_i, & R_{xy} &= \frac{c_1}{t} + d_1, & R_{xz} &= \frac{c_2}{t} + d_2, & R_{yz} &= \frac{c_3}{t} + d_3 \\ \lambda_i &= \frac{a_i}{t} + g_i, & \xi &= \frac{e_1}{t} + f_1, & \eta &= \frac{e_2}{t} + f_2, & \zeta &= \frac{e_3}{t} + f_3 \end{aligned} \quad (6.2.23)$$

とおいてみる。

はじめに、(6.2.23) が意味する流れの形について調べておこう。速度場は (6.2.5) で与えられた。6.2.2 と同様に、空間座標を流線上の点を表すとすると、時間が十分経過したときの速度場の式 (6.2.5) は、(6.2.23) より

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g_1 x + f_1 y + f_2 z \\ \dot{y} &= -f_1 x + g_2 y \\ \dot{z} &= -f_2 x + g_3 z \end{aligned} \quad (6.2.24)$$

となる。 $f_2=0$ が (6.2.6) に相当する。この個有値方程式は

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - g_1 & -f_1 & -f_2 \\ f_1 & \lambda - g_2 & 0 \\ f_2 & 0 & \lambda - g_3 \end{pmatrix} = 0$$

すなわち、

$$\lambda^3 + (f_1^2 + f_2^2 - g_2^2 + g_1 g_3) \lambda = g_1 g_2 g_3 + f_1^2 g_3 + f_2^2 g_2 \quad (6.2.25)$$

である。この方程式の数係数は $g_3 = -g_1 - g_2$ を使って f_1, f_2, g_1, g_2 で表すことができる。全て実根の場合が双曲流 (hyperbolic)、2つが複素数根の場合が楕円流 (elliptic) に対応する。ただし、 λ の実部は一般に 0 でないから、楕円流といっても速度成分は指数関数的に増減する因子を持つ。流れ全体は、渦巻きながら滞留点に向かって近づいたりそこから遠ざかる Burgers 流のパターンを示す。双曲流と楕円流の境界は

$$g_2^2 - g_1 g_3 - f_1^2 - f_2^2 = 0$$

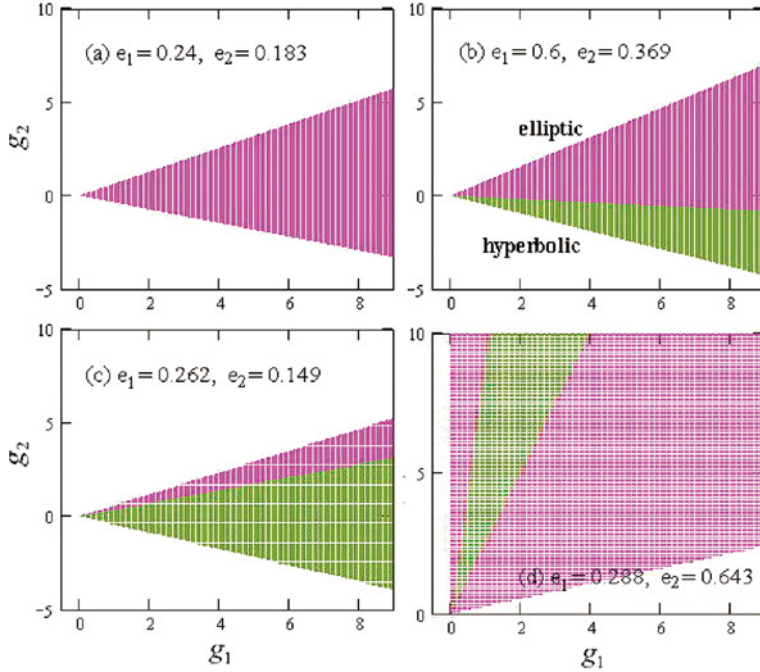


図 4. (e_1, e_2) を定めた時の (g_1, g_2) の物理領域の例。楕円流 (elliptic) と双曲流 (hyperbolic) の領域を (b), (c), (d) に示したように紫と薄緑で色分けしている。

または、 $g_2^2 - g_1 g_3 - f_1^2 - f_2^2 > 0$ のときに (6.2.25) の左辺が極値を取る

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{g_2^2 - g_1 g_3 - f_1^2 - f_2^2}{3}}$$

での (6.2.25) の左辺が右辺に等しいとおいて

$$\pm \frac{2}{3} (g_2^2 - g_1 g_3 - f_1^2 - f_2^2) \sqrt{\frac{g_2^2 - g_1 g_3 - f_1^2 - f_2^2}{3}} = -g_1 g_2 g_3 - f_1^2 g_3 - f_2^2 g_2$$

の 3 つある。与えられた e_1 と e_2 に対し f_1 と f_2 は g_1, g_2 の 1 次式で表されるはずである。いずれも g_1 と g_2 の同次式なので、境界は g_1 - g_2 平面での原点を通る直線で、その傾きは e_1 と e_2 で決まる。具体例を図 4 に示す。もちろん、どの g_1, g_2, e_1, e_2 ($e_1^2 + e_2^2$ は後で出てくる式 (6.2.27), (6.2.28) で決まる) の組み合わせが実現するかは初期条件による。

これから、力学系を解くことを考える。非圧縮性の条件 $\sum_i \lambda_i = 0$ があるので、独立な未知係数の数は $24 - 2 = 22$ 。他方、我々が Reynolds 応力と見なしたい R_{ij} テンソルに対する微分方程式は 6 個ある。上式を代入して現れる t^{-2}, t^{-1}, t^0 のそれぞれの比例係数が 0 になることから、(6.2.23) に含まれる定数に対し $6 \times 3 = 18$ 個の代数式が得られる。さらに微分方

程式は 1 階なので、初期条件から 6 個の式が現れる。一見、未知数の数より式の数が多い。これは、 R_{ij} に対する“外力” (q_i と q_{ij} , $i \neq j$, 全部で 6 個) を独立に外部から与えられるとしたからである。“余分な” 2 個の式はこれら 6 個の“外力” 変数の間の関係を決める、言い換えれば独立な“外力” 成分は $6 - 2 = 4$ 個であるとすれば、つじつまの合う解を得ることができる。 λ_i と ξ , η , ζ についても同様に考える。

さて、(6.2.4) において $F_{ij}^{(a)}$ も定数（すなわち外的条件が定常）と仮定してこれに (6.2.23) の表式を代入すると、 $1/t^2$ と $1/t$ の係数を比較して

$$\begin{aligned} e_1 + e_1 a_3 &= e_2 + e_2 a_2 = e_3 + e_3 a_1 = 0 \\ a_3 f_1 + g_3 e_1 &= a_2 f_2 + g_2 e_2 = a_1 f_3 + g_1 e_3 = 0 \end{aligned}$$

が成り立たねばならないことが分かる。 $e_1 = e_2 = e_3 = 0$, すなわち $\xi = \eta = \zeta = 0$ の場合は 6.2.3 で扱っている。ここでは非対角成分が存在する解を求めたい。我々は、一般性を損なうことなく $e_1 e_2 \neq 0$ として前と同様に

$$a_1 = 2, a_2 = a_3 = -1 \quad (6.2.20)$$

と選ぶことにする。すると

$$e_3 = 0, f_3 = 0, f_1 = g_3 e_1, f_2 = g_2 e_2 \quad (6.2.26)$$

このとき $f_1 f_2 \neq 0$ ということが起こりうるのは重要な点である。

一方、(6.2.23) を (6.2.22) に代入して $1/t^2$ の項の係数を 0 とおくと

$$\begin{aligned} (2\alpha_2 a_1 - 1)c_x + \alpha_3((a_2 - a_1)c_y + (a_3 - a_1)c_z) + (1 - 4\alpha_1)(e_1 c_1 + e_2 c_2) &= 0 \\ (2\alpha_2 a_2 - 1)c_y + \alpha_3((a_1 - a_2)c_x + (a_3 - a_2)c_z) + (1 - 4\alpha_1)(-e_1 c_1 + e_3 c_3) &= 0 \\ (2\alpha_2 a_3 - 1)c_z + \alpha_3((a_1 - a_3)c_x + (a_2 - a_3)c_y) - (1 - 4\alpha_1)(e_2 c_2 + e_3 c_3) &= 0 \\ \left(\frac{1}{2} - 2\alpha_1\right)(-e_1(c_x - c_y) + e_3 c_2 + e_2 c_3) + (\alpha_2(a_2 + a_1) - 1)c_1 &= 0 \\ \left(\frac{1}{2} - 2\alpha_1\right)(-e_2(c_x - c_z) - e_3 c_1 + e_1 c_3) + (\alpha_2(a_3 + a_1) - 1)c_2 &= 0 \\ -\left(\frac{1}{2} - 2\alpha_1\right)(e_3(c_y - c_z) + e_1 c_2 + e_2 c_1) + (\alpha_2(a_3 + a_2) - 1)c_3 &= 0 \end{aligned}$$

$c_x, c_y, c_z, c_1, c_2, c_3$ に非自明な解があるためには、(6.2.20), (6.2.26) を考慮して

$$\det M = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} 4\alpha_2 - 1 & -3\alpha_3 & -3\alpha_3 & 2\beta e_1 & 2\beta e_2 & 0 \\ 3\alpha_3 & -2\alpha_2 - 1 & 0 & -2\beta e_1 & 0 & 0 \\ 3\alpha_3 & 0 & -2\alpha_2 - 1 & 0 & -2\beta e_2 & 0 \\ -\beta e_1 & \beta e_1 & 0 & \alpha_2 - 1 & 0 & \beta e_2 \\ -\beta e_2 & 0 & \beta e_2 & 0 & \alpha_2 - 1 & \beta e_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta e_2 & -\beta e_1 & -2\alpha_2 - 1 \end{pmatrix} \quad (6.2.27)$$

が成り立たねばならない。ここで

$$\beta = \frac{1}{2} - 2\alpha_1$$

である。式 (6.2.27) は、 e_1 と e_2 の可能な組み合わせを結合定数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ の関数として定める。

$\det M$ を展開すると

$$\det M = A(e_1^2 + e_2^2)^2 + B(e_1^2 + e_2^2) + C$$

$$A = (4 + 4\alpha_2 - 8\alpha_2^2 + 18\alpha_3^2)\beta^4$$

$$B = (1 - \alpha_2)(1 + 2\alpha_2)(5 + 2\alpha_2 - 16\alpha_2^2 + 36\alpha_3^2)\beta^2$$

$$C = (1 - \alpha_2)^2(1 + 2\alpha_2)^2(1 - 2\alpha_2 - 8\alpha_2^2 + 18\alpha_3^2)$$
(6.2.28)

となり、 $e_1^2 + e_2^2$ のみの関数で α_3 の遇関数だから、 $e_1 = 0, e_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0$ に話を限れば十分である。図 5 に、 e_2 が正の実数となる (α_2, α_3) の領域と $e_2(\alpha_2, \alpha_3)$ の値を、(a) $\alpha_1 = 0.2, e_1 = 0$ と (b) $\alpha_1 = 1, e_1 = 0$ の場合に示した。先に問題にした Reynolds 理論との対応点 A は物理領域と非物理領域の境界にあり $e_2 = 0$ を与える。

特別な点 $e_1 = e_2 = 0$ では $f_1 = f_2 = 0$ でもあり、 w の対角成分だけが残るので流れは双曲流である。これが実現するのは (6.2.28) より $C = 0$ 、すなわち

$$\alpha_2 = 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{8}(-1 \pm 3\sqrt{1 + 16\alpha_3^2})$$

の場合である。

前に述べた理由で、もう一つの対応点 B $(1, -2/3)$ も物理的に意味がないが、その周囲には物理領域がある。6.2.3.2 で非対角成分が 0 の場合を調べたが、そのときは周辺に物理領域が無かったことと対照的である。

同様に、(6.2.22) で $1/t$ の項の係数を 0 とおいて

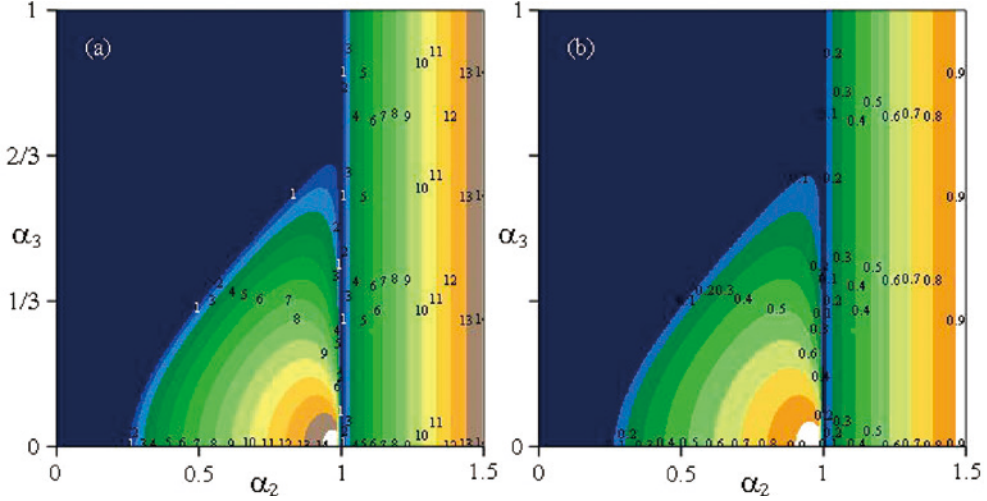


図 5. モデルが物理的に意味のある結果を与えるパラメータ α_1 と α_3 の範囲。(a) $\alpha_1 = 0.2, e_1 = 0$
 (b) $\alpha_1 = 1, e_1 = 0$ の場合に $c_x, c_y, c_z, c_1, c_2, c_3$ が非ゼロの実数となるような (α_2, α_3) の物理
 領域が青から白の色で色分けされた等高線図で表されている。紺色は (6.2.27) が実数解
 をもたない非物理領域。この図での e_2 は、最大値は (a) が 14.8, (b) が 0.98, A 点で
 はともに 0 である。

$$\begin{aligned}
 & (1 - 4\alpha_1)(e_1 d_1 + f_1 c_1 + e_2 d_2 + f_2 c_2) + 2\alpha_2(a_1 d_x + g_1 c_x) \\
 & + \alpha_3((a_2 - a_1)d_y + (g_2 - g_1)c_y + (a_3 - a_1)d_z + (g_3 - g_1)c_z) = 0 \\
 & - (1 - 4\alpha_1)(e_1 d_1 + f_1 c_1) + 2\alpha_2(a_2 d_y + g_2 c_y) \\
 & + \alpha_3((a_1 - a_2)d_x + (g_1 - g_2)c_x + (a_3 - a_2)d_z + (g_3 - g_2)c_z) = 0 \\
 & - (1 - 4\alpha_1)(e_2 d_2 + f_2 c_2) + 2\alpha_2(a_3 d_z + g_3 c_z) \\
 & + \alpha_3((a_1 - a_3)d_x + (g_1 - g_3)c_x + (a_2 - a_3)d_y + (g_2 - g_3)c_y) = 0 \\
 & - \left(\frac{1}{2} - 2\alpha_1\right)(e_1(d_x - d_y) + f_1(c_x - c_y) + e_2 d_3 + f_2 c_3) + \alpha_2((a_2 + a_1)d_1 + (g_2 + g_1)c_1) = 0 \\
 & - \left(\frac{1}{2} - 2\alpha_1\right)(e_2(d_x - d_z) + f_2(c_x - c_z) + e_1 d_3 + f_1 c_3) + \alpha_2((a_3 + a_1)d_2 + (g_3 + g_1)c_2) = 0 \\
 & - \left(\frac{1}{2} - 2\alpha_1\right)(e_1 d_2 + f_1 c_2 + e_2 d_1 + f_2 c_1) + \alpha_2((a_3 + a_2)d_3 + (g_3 + g_2)c_3) = 0
 \end{aligned} \tag{6.2.29}$$

という関係を得る。決めるべき変数は $d_x, d_y, d_z, d_1, d_2, d_3, f_1, f_2, g_1, g_2, g_3$ の 11 個で、これに対し式の数 (6.2.29) の 6 個と (6.2.26) の 2 個、及び非圧縮性条件 $\sum_i g_i = 0$ の計 9 個なので、式が 2 個足りない。

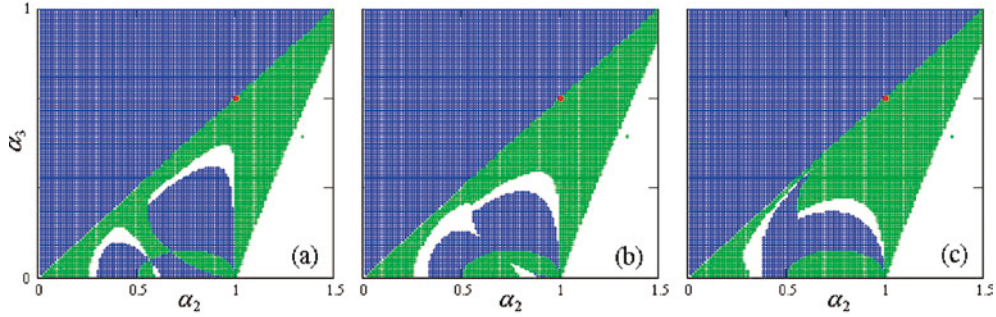


図 6. $\alpha_1 = 0.2$ のときの $d_x/g_1, d_y/g_1, d_z/g_1$ が全て同符号になる (α_2, α_3) の領域。青は正、緑は負を表す。 $g_2/g_1 =$ (a) -1 , (b) 0 , (c) 1 。赤の点は A 点である。

平均流としてはいろいろのパターンがあるのだから、全てのパラメータが自動的に決まらないのは当然のことである。我々が知りたいのは、ある平均流を与えたときの一様乱流中の揺らぎの情報である。平均流はテンソル w で決まり、今の場合それは実質的に g_1 と g_2 である。この 2 個の係数の値を外部から与えると他が決まるということになっていて、我々の目的は達成されたことになる。

(6.2.23) が Reynolds 応力を表すためには d_x, d_y, d_z は正または 0 でなければならない。この条件がどのパラメータ値で満たされるかを調べておく必要がある。 $g_2/g_1 = 1, 0, -1$ の場合を図 6 に示している。図 5 と合わせると、物理的領域は直線 $\alpha_3 = (2/3)\alpha_2$ の下側にあることが分かる。その中でも、白色で示された非物理領域が不定形で物理領域に入り組んでいる。Reynolds 理論と対応する A 点はここでも物理領域と非物理領域の境界上にある。高次効果によって α_2 や α_3 の有効値が時間・空間的に変動することはありうる。そのときは、以上の事情が乱流が複雑な変動を示す要因になることが予想される。

6.3 ϕ が空間的に一定、 v が空間座標の 1 次関数の場合

解くべき方程式は (6.1.9) と (6.1.10) である。(6.1.9) を次のように書きなおす：

$$(\delta_{im}\delta_{jn}\partial_t + \delta_{mi}w_{nj} + 4\alpha_3\delta_{nj}a_{im})\tilde{w}_{mn} = 0 \quad (6.3.1)$$

9 個の変数 \tilde{w}_{km} に対して 9 個の方程式がある。特殊な場合として w が (したがって a も) 定数とし

$$\dot{\tilde{w}}_{km} = s\tilde{w}_{km}$$

すなわち \dot{w} に対し指数関数型を仮定する。(w が t^{-1} に比例するときはべき関数型

$\dot{\tilde{w}}_{km} = s\tilde{w}_{km}/t$ を仮定する。)すると (6.3.1) は s の固有値方程式になる。 \mathbf{w} が $w_{i3} = w_{3i} = 0$ のときは

$$\det \begin{pmatrix} s + w_{11} + \alpha a_{11} & 0 & w_{21} & \alpha a_{12} \\ 0 & s + w_{22} + \alpha a_{22} & \alpha a_{21} & w_{12} \\ w_{12} & \alpha a_{12} & s + w_{22} + \alpha a_{11} & 0 \\ \alpha a_{21} & w_{21} & 0 & s + w_{11} + \alpha a_{22} \end{pmatrix} = 0$$

という s の 4 次方程式になる。(行列の行は上から順に $\tilde{w}_{11}, \tilde{w}_{22}, \tilde{w}_{12}, \tilde{w}_{21}$ に対応する。一般には 9 次方程式である。)これは $a_{11} = a_{22} = 0$, $w_{11} = -w_{22}$ ($\equiv \lambda$ とおく), $w_{12} = -w_{21} = a_{12} = -a_{21}$ ($\equiv \xi$ とおく)を用いて

$$s^4 - 2(\lambda^2 - (1 + \alpha^2)\xi^2)s^2 + (\lambda^2 - (1 - \alpha^2)\xi^2)^2 = 0$$

と表わすことができるので、容易に解くことができる。これと (6.1.10) から Reynolds 応力を決めることができる。これらを数値的に解くことはできるが、煩雑になるのでここではこれ以上は述べない。

7. 結論

平均流速に関する DEVM を、一様乱流を念頭に置きながらテンソルとの相互作用を含むように拡張した。ここで用いたモデル構成は平均流速に関する結果を損なわないという利点がある。テンソルを Reynolds 応力とみなして一様乱流に適用した結果は数値シミュレーションの結果とつじつまが合っている。さらに、Navier-Stokes 理論が、乱流を記述するにおいて最も敏感な臨界点の一つの上に乗っていることも明らかにされた。

テンソルは、並進不変性、回転不変性と Galilei 変換不変性に抵触しないように導入された。この条件に従う物理量は Reynolds 応力だけではない。したがって、我々のモデルは Reynolds 応力以外のテンソル—例えば渦度の 2 次の揺らぎ—も記述できるはずである。この予想は検証するに値する。

基本的な準備はこれで完了した。数値解析の多くを一様乱流において自然減衰がない場合に限ったが、モデルの一般的傾向の骨子を把握することはできたと思う。これらの相互作用が他の乱流を記述できるかを次に調べることになる。これについては将来報告する予定である。

参考文献

- Bateman H, 1931, On dissipative systems and related variational principles, *Phys. Rev.* **38**, 815-819.
- Davidson P A, 2015, *Turbulence : An introduction for scientists and engineers* (Oxford), Part II.
- Takahashi K, 2017a, Variational Principle for Eulerian Dynamics of Incompressible Viscous Fluid and A New ‘Eddy’ Viscosity Model *Lib. Arts Rev. (Tohoku Gakuin Univ.)* No. 177 Jul., 1-20.
- Takahashi K, 2017b, Mean-field theory of turbulence from the variational principle and its application to the rotation of a thin fluid disk *Prog. Theor. Exp. Phys.*, 083J01.
- Takahashi K, 2018, Incorporating a tensor in the effective viscosity model of turbulence and the Reynolds stress *AIMS Mathematics*, **3**(4) : pp 554-564.
- Takahashi K, 2019, Reconstructing the tensor model of Reynolds stress in a turbulent channel flow *Lib. Arts Rev. (Tohoku Gakuin Univ.)*, No. 183 Mar., pp 1-4.
- Takaoka M, 1997, Anisotropy and vortex structure in turbulence subjected to mean uniform strain *J. Phys. Soc. Jpn.* **66**, pp 2008-2025.
- 木田重雄・柳瀬眞一郎 [Kida S, Yanase S] 1999, 『乱流力学 Turbulence dynamics』(朝倉書店).
- 高橋光一. 2018a, Variational Principle in Hydrodynamics and Mean-Field Theory of Turbulence — A Sequel of the Paradox of Vortices — I. Eddy viscosity theory of turbulence and the canonical variational principle *Lib. Arts Rev. (Tohoku Gakuin Univ.)* No. 179 Mar., 119-145.
- 高橋光一. 2018b, Variational Principle in Hydrodynamics and Mean-Field Theory of Turbulence — A Sequel of the Paradox of Vortices — II. Variational Principle and Mean-Field Theory of Turbulence *Lib. Arts Rev. (Tohoku Gakuin Univ.)* No. 180 Jul., 29-72.

Abstract

The Dynamical Effective Viscosity Model proposed by the author is extended so as to incorporate a tensor field as the Reynolds stress in turbulence. The first attempt was done in 2018 and proved to reproduce qualitatively the observation. There, however, the tensor was not symmetric. In this paper, this aspect of the old model is remedied. The revised model is applied to uniform turbulence to reconfirm the consistency with the known study by computer simulation. It is also shown that the Navier-Stokes theory is on one of the critical points of the model.

Lib. Arts Rev. (Tohoku Gakuin Univ.) 2020, **184** 19-62